Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Akademska 2012/2013.

(sveska je skinuta sa stranice **pf.unze.ba\nabokov**
U svesci je moguća pojava grešaka. Za uočene greške pisati na ***infoarrt@gmail.com***)

Euklidska geometrija II
(2. dio)

Sličnost trouglova i Talesova teorema

Definicija sličnosti trouglova
Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su slična ako su im sva tri ugla redom podudarna i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne tj. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. ◊

Stav 1 (slič. UUU)
Ako u dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo sva tri ugla redom podudarna tada su ta dva trougla slična. ◊

Stav 2 (slič. SSS)
Ako u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo tri stranice redom proporcionalne tada su ta dva trougla slična. ◊

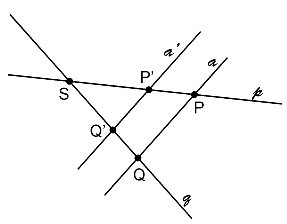
Stav 3 (slič. SUS)
Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao između njih tada su ta dva trougla slična. ◊

Stav 4 (slič. SSU)
Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao nasprem veće stranice tada su ta dva trougla slična. ◊

1. U trouglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C') || p(A, B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom.

2. U trouglu $\triangle ABC$ date su dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$. Dokazati da je tada $p(E, F) || p(B, C)$.

Talesova teorema
Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P' i Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\dfrac{SP}{SP'} = \dfrac{SQ}{SQ'} = \dfrac{PQ}{P'Q'}$. ◊



Posljedice Talesova teorema

$$\frac{SP'}{SQ'} = \frac{SP}{SQ}, \quad \frac{SP}{P'P} = \frac{SQ}{Q'Q}, \quad \frac{SP'}{P'P} = \frac{SQ'}{Q'Q}, \quad \frac{SP}{PQ} = \frac{SP'}{P'Q'}$$

Obrat Talesove teoreme

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} \Rightarrow a \| a'.$$

3. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

4. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

5. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

6. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

7. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

8. Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.
Posljedica zadatka: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

9. Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S, T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.
Napomena: Proizvod $SC \cdot SD$, gdje je tačka S unutar ili izvan kružnice i prava SCD siječe krug u tačkama C i D, zovemo stepen ili potencija tačke S u odnosu na datu kružnicu.

10. U četverouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60°$ i $\measuredangle DAC = 50°$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

11. Neka je S centar kružnice opisane oko trougla ABC, M tačka takva da je $M - A - B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

12. Dokazati da težišnica trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

13. Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu trougla u omjeru druge dvije stranice.

14. Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

15. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

16. Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometriskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

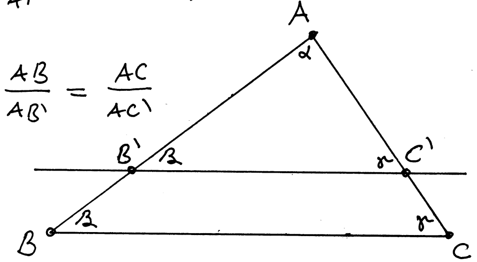
17. U pravougaoniku $\square ABCD$ tačka M je sredina stranice AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P, M) \cap p(A, C)$. Dokazati da je $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$, gdje je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C, D)$ takva da je $C - D - P$.

18. U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

U trouglu ΔABC date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B',C') \parallel p(A,B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom. Dokazati i obrnuto, ako su date dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$ tada je $p(E,F) \parallel p(B,C)$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ B' \in AB,\ C' \in AC\\ p(B',C') \parallel p(A,B)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$



$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(B,A)$ je transferzala $\Rightarrow \angle CBA \cong \angle C'B'A = \beta$

$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle B'C'A = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC \cong \angle AB'C' = \beta\\ \angle BCA \cong \angle B'C'A = \gamma\\ \angle BAC \cong \angle B'AC' = \alpha\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta AB'C'$$

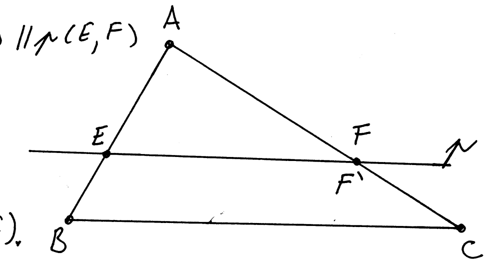
$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

q.e.d.

obrnuto:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ E \in AB,\ F \in AC\\ \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}\end{array}\right\} \Rightarrow p(B,C) \parallel p(E,F)$$



Kroz tačku E povucimo pravu p tako da je $p \parallel p(B,C)$. Neka je $p \cap AC = \{F'\}$.

Na osnovu prethodnog dijela dokaza imamo

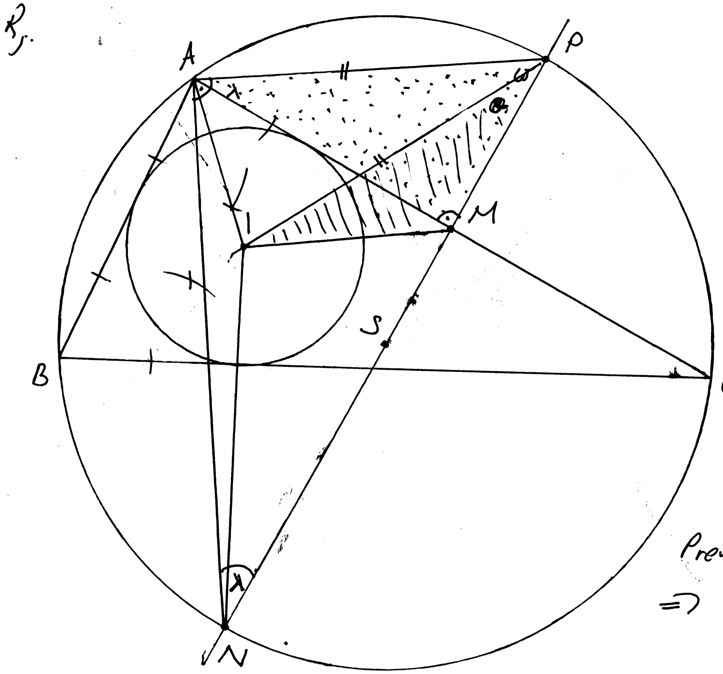
$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF'}$. Kako je još $F \in AC$, $F' \in AC$ i $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

$\Rightarrow F' \equiv F$ pa $p(E,F) \parallel p(B,C)$

q.e.d.

Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\overset{\frown}{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak P-M-S i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $p[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\angle APM \cong \angle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od 90° tj. $\angle AMP = \angle NAP = 90^\circ$ ($\angle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran $\angle PAM \cong \angle ANP = \lambda$.

Prema sličnosti UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

q.e.d.

Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.

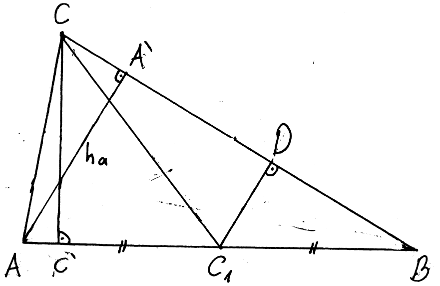
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l}\frac{PI}{NP} = \frac{MP}{IP}\\ \angle IPN \cong \angle MPI = \theta\\ \text{(zajednički ugao)}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič. SUS)}} \Delta PIN \sim \Delta PMI$$

q.e.d.

Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.
Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.
Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AA'}{C_1D}$.

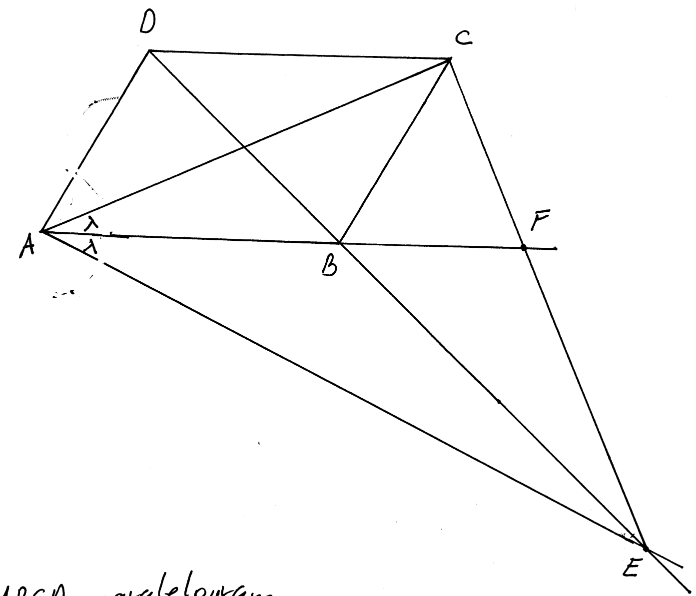
Kako je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

Možemo zaključiti $\frac{AA'}{C_1D} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$\Rightarrow C_1D = \frac{1}{2} h_a$ q.e.d.

Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

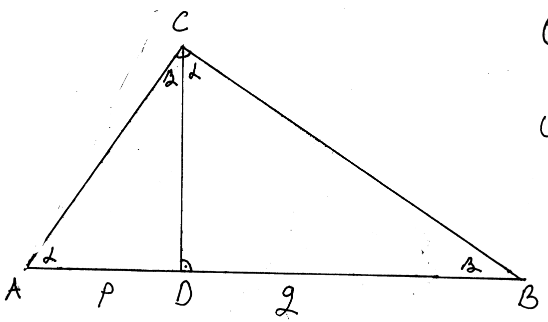
$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \xRightarrow{T.T.} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF}$ ...(*)

Kako je $CD \cong AB \xRightarrow{(*)} \frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$

q.e.d.

\# U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD=p$, $BD=q$ dokazati da je $CD=\sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle CAD=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$

U $\triangle ADC$ kako je

$\measuredangle DAC=\alpha$, $\measuredangle ADC=90^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

Slično $\measuredangle DCB=\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ADC=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAD=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle DCA=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{slič. UUU}}\triangle ADC\sim\triangle CDB$$

$$\Downarrow$$

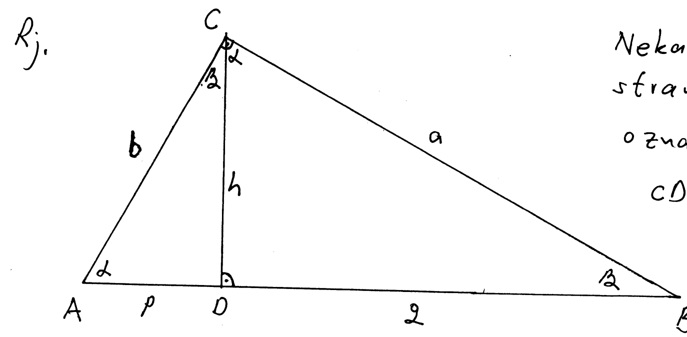
$$\frac{CD}{q}=\frac{p}{CD}\Rightarrow CD^2=pq$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{pq}$$

q.e.d.

\# U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U $\triangle ADC$, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U $\triangle BCD$, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{slič. UUU}}\triangle ABC\sim\triangle ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p}\Rightarrow b^2=cp\quad\dots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{slič. UUU}}\triangle ABC\sim\triangle BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q}\Rightarrow a^2=cq\quad\dots(2)$$

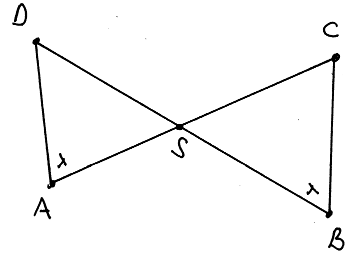
$$(1)\text{ i }(2)\Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Rj. potreban uslov „$\Leftarrow$": Pretpostavimo da je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$ i dokažimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni:

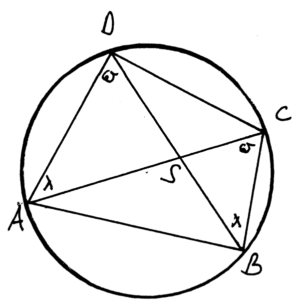


$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle ASD = \sphericalangle CSB \\ &\frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SD} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{sličnost SUS}}$$

$$\Rightarrow \triangle ASD \sim \triangle BSC$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle DAS \cong \sphericalangle CBS = \lambda$$

i kako ova dva ugla gledaju na zajedničku stranicu
$$\Rightarrow \square ABCD \text{ je tetivni četverougao.}$$

dovoljan uslov „$\Rightarrow$": Pretpostavimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni. Dokažimo da vrijedi $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.



$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle DAS \cong \sphericalangle CBS = \lambda \quad (\text{nad tetivom } CD) \\ &\sphericalangle ASD \cong \sphericalangle CSB \quad (\text{unakrsni uglovi}) \\ &\sphericalangle ADS \cong \sphericalangle BCS = \omega \quad (\text{nad tetivom } AB) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

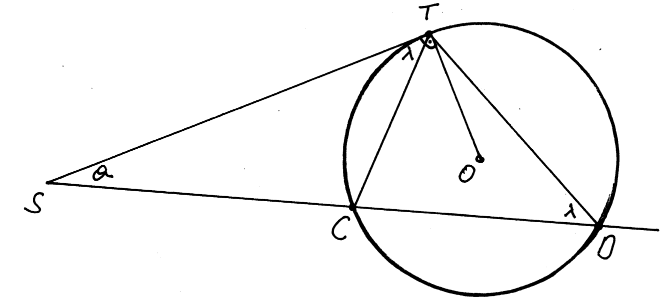
$$\xRightarrow{\text{sličnost UUU}} \triangle ASD \sim \triangle BSC$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC} \Rightarrow SA \cdot SC = SB \cdot SD$$

q.e.d.

Napomena: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

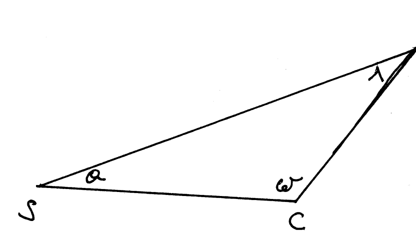
Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S,T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.

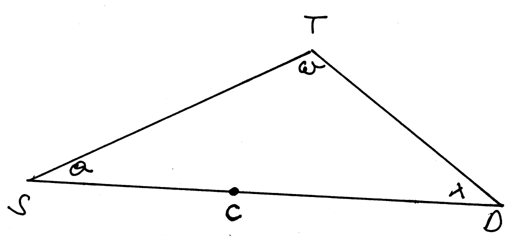
Rj.



Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \sphericalangle CTS \cong \sphericalangle SDT = \lambda$.

Dalje imam $\sphericalangle OST = \alpha \Rightarrow \sphericalangle SCT \cong \sphericalangle DTS = \omega$





$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle TSD \cong \sphericalangle TSC = \alpha \\ &\sphericalangle SDT \cong \sphericalangle CTS = \lambda \\ &\sphericalangle DTS \cong \sphericalangle SCT = \omega \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle SDT \sim \triangle SCT$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{ST}{SC} = \frac{SD}{ST}$$

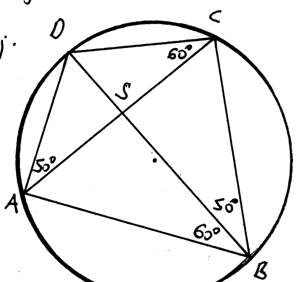
$$\Rightarrow ST^2 = SC \cdot SD$$

q.e.d.

Napomena: Proizvod $SC \cdot SD$ za tačku S, unutar ili izvan kružnice, je konstantan (zavisi samo od položaja tačke S) i ovaj proizvod zovemo POTENCIJAL tačke S u odnosu na datu kružnicu.

U četverouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60°$ i $\measuredangle DAC = 50°$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

Rj.



$SA \cdot SC = SB \cdot SD \Rightarrow \square ABCD$ tetivni

$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 60°$, $\measuredangle DAC = 50° = \measuredangle DBC$

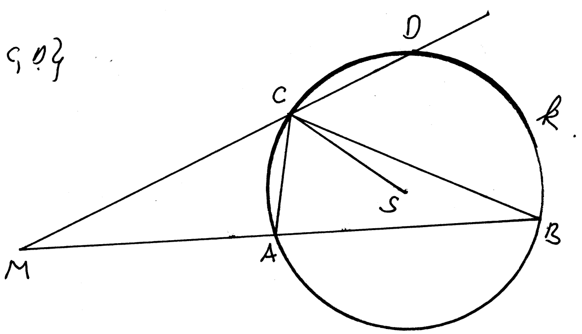
$\Rightarrow \measuredangle ADC = 70°$

(možemo dobiti kao zbir uglova u ΔACD ili kao $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180°$)

Neka je S centar kružnice opisan oko ΔABC, M tačka takva da je $M-A-B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

Rj: Neka je $p(M,C) \cap k = \{C, D\}$

$\measuredangle SCM = ?$



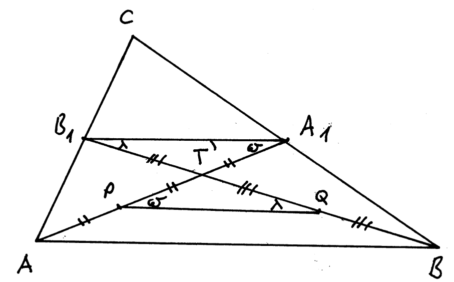
Imamo $MA \cdot MB = MC \cdot MD = MC^2 \Rightarrow MC = MD \Rightarrow C \equiv D$

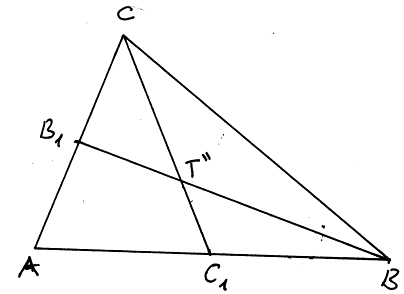
$p(M,C)$ je tangenta na kružnicu k

$\Rightarrow \measuredangle SCM = 90°$.

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q sredine redom duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla)

$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T'$ i $QT' \cong T'B_1$

Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u trouglu u omjeru druge dvije stranice.

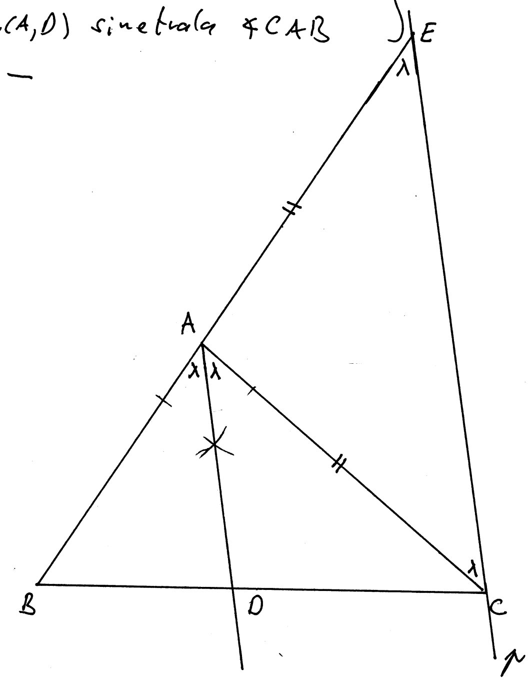
Rj.

ΔABC

$D \in BC$

$p(A,D)$ simetrala $\measuredangle CAB$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



Kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,D)$. $\{E\} = p \cap p(B,A)$

Kako je $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \lambda$

to je i $\measuredangle ACE = \lambda$,

a kako je $\measuredangle BAC = 2\lambda$ vanjski ugao ΔACE

to $\measuredangle AEC = \lambda$

$\Rightarrow$ ΔACE jkk

$(AC = AE)$

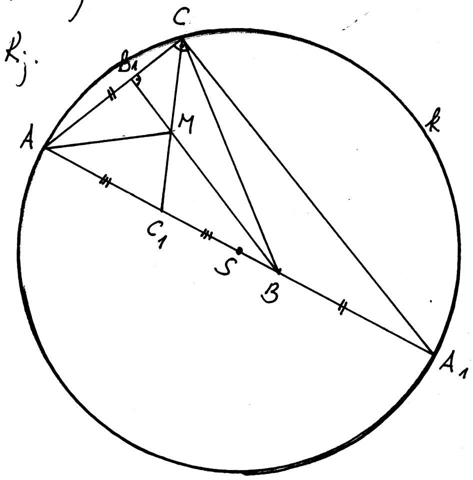
$$p \parallel p(A,D) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{tj.} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

Napomena: Zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži u datom omjeru vidimo da vrijedi i obrnuta tvrdnja tj. ako je tačka D na duži BC takva da je $BD : DC = AB : AC$ tada je prava AD simetrala ugla $\measuredangle BAC$.

Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu ΔABC simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

Rj.



Neka je u ΔABC, CC_1 težišna linija, a BB_1 visina.

$\{M\} = CC_1 \cap BB_1$

Trebamo pokazati da je $p(A,M)$ simetrala ugla $\measuredangle BAC$.

Dovoljno je pokazati da je

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC}$$

(simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije)

$\measuredangle ACA_1 = 90°$ (ugao nad prečnikom)

$$p(B,B_1) \parallel p(A_1,C) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{C_1M}{MC} = \frac{C_1B}{BA_1}.$$

Kako je $C_1B \cong AC_1$ i $BA_1 \cong AC$ to

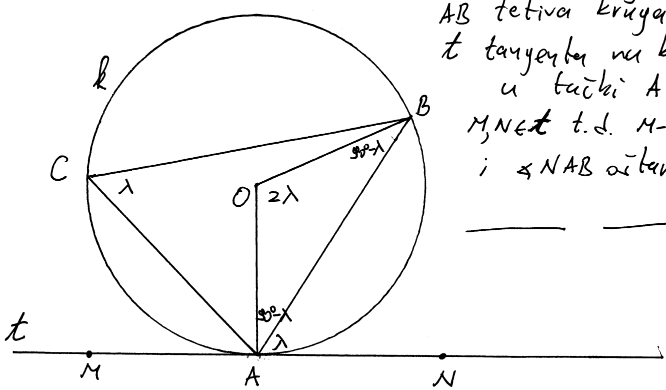
$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC} \Rightarrow p(A,M) \text{ je simetrala ugla}$$

$\Rightarrow$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku se u istoj tački

q.e.d.

Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$k(O,r)$ dati krug
AB tetiva kruga
t tangenta na krug u tački A
$M, N \in t$ t.d. M-A-N
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong$
$\cong ACB$

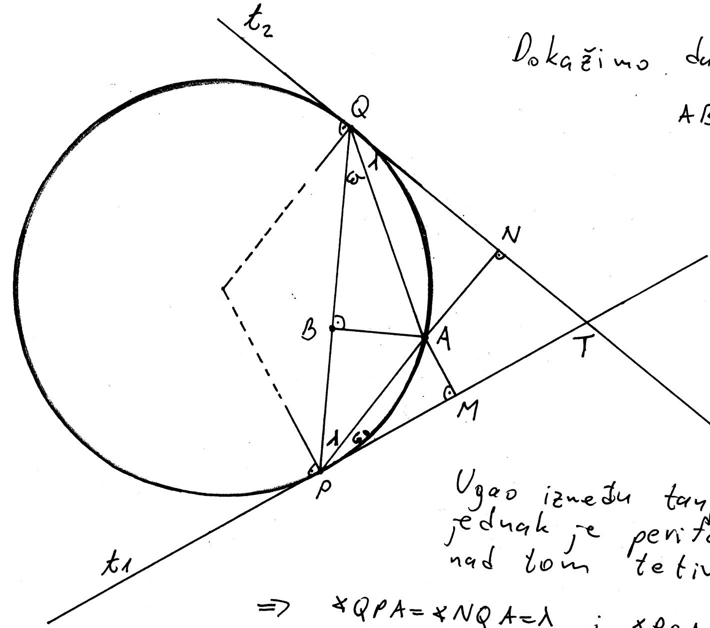
$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90° - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometriskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

Rj.



Dokažimo da je
$$AB = \sqrt{MA \cdot AN}.$$

Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle QPA = \measuredangle NQA = \lambda$ i $\measuredangle PQA = \measuredangle APM = \omega$.

$\triangle BPA \sim \triangle NQA$ (sličnost UUU)

$\Downarrow$

$$\frac{AB}{AN} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots(1)$$

$\triangle PMA \sim \triangle QBA$ (sličnost UUU)

$\Downarrow$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AN \cdot AM$

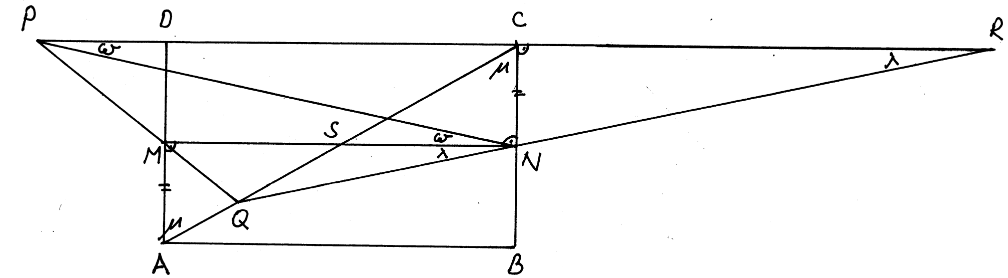
$\Downarrow$

$$AB = \sqrt{AN \cdot AM}$$

q.e.d.

\# U pravougaoniku $\square ABCD$ tačka M je sredina strane AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P,M) \cap p(A,C)$. Dokazati da je $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$, gdje je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C,D)$ takva da je C-D-P.

Rj.



Označimo sa $\{S\} = AC \cap MN$, $\lambda = \sphericalangle QNM$ i $\omega = \sphericalangle MNP$. Treba dokazati da je $\lambda = \omega$.

$\square ABCD$ pravougaonik, M sredina AD, N sredina BC

$\Rightarrow AM \cong AD \cong BN \cong CN$ i kako je $p(A,D) \parallel p(B,C)$

$\Rightarrow \square ABNM$ i $\square MNCD$ paralelogrami

a kako je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$ to su

$\square ABNM$ i $\square MNCD$ pravougaonici

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle MAC = \sphericalangle NCA = \mu$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle MAS \cong \sphericalangle SCN = \mu \\ AM \cong NC \\ \sphericalangle AMS \cong \sphericalangle SNC = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta SMA \cong \Delta SNC \Downarrow MS \cong SN \text{ tj.}$$

S je sredina duži MN

Označimo sa $\{R\} = p(Q,N) \cap p(P,C)$.

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(Q,R)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle QNM \cong \sphericalangle NRP = \lambda$

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(P,N)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle MNP \cong \sphericalangle NPR = \omega$

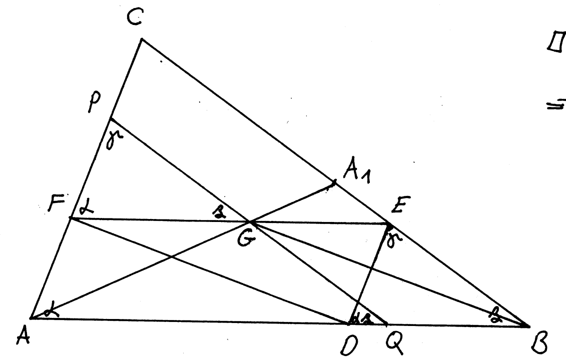
$p(M,N) \parallel p(P,R) \xRightarrow{TT} \frac{QC}{QS} = \frac{CR}{SN}$ i $\frac{QC}{QS} = \frac{PC}{SM} \Rightarrow \frac{RC}{CP} = \frac{SN}{SM} = 1$ tj. $RC \cong PC$

$$\left.\begin{array}{l} PC \cong RC \\ \sphericalangle PCN \cong \sphericalangle RCN = 90^\circ \\ CN \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta PCN \cong \Delta RCN \Downarrow \sphericalangle NPC \cong \sphericalangle NRC \Rightarrow \lambda = \omega$$

q.e.d.

\# U trougao ΔABC upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

Rj.



$\square ADEF$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(E,F)$

i $p(A,F) \parallel p(D,E)$

Kroz tačku G povucimo pravu paralelnu pravoj $p(B,C)$ koja siječe stranice AC i AB redom u tačkama P i Q.

$p(G,E) \parallel p(Q,B)$ i $p(Q,G) \parallel p(E,B) \Rightarrow \square QBEG$ paralelogram

$\Rightarrow GQ \cong BE$

$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xRightarrow{TT} \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{GQ}{GP} \Rightarrow \frac{GQ}{GP} = 1$ tj. $PG = GQ$

$p(B,C) \parallel p(P,Q)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle AQP \cong \sphericalangle ABC = \beta$

$p(A,B) \parallel p(E,F)$ i $p(Q,P)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle AQP \cong FGP = \beta$

tj. $\sphericalangle AQC \cong \sphericalangle FGP = \beta$

$p(A,B) \parallel p(F,E)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CFE = \alpha$

$p(A,C) \parallel p(D,F)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle EDB = \alpha$

tj. $\sphericalangle CFE \cong \sphericalangle EDB = \alpha$ pa je i $\sphericalangle FPG \cong \sphericalangle DEB = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle PFG \cong \sphericalangle EDB = \alpha \\ \sphericalangle FGP \cong \sphericalangle DBE = \beta \\ \sphericalangle GPF \cong \sphericalangle BED = \gamma \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{sličn. UUU}} \Delta FGP \sim \Delta DBE$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{FG} = \frac{BE}{PG} \xRightarrow{BE = GQ = PG} \frac{DB}{FG} = 1 \text{ tj. } DB = FG$$

$p(D,B) \parallel p(F,G)$ i $DB \cong FG \Rightarrow \square BGFD$ paralelogram

q.e.d.

Konstrukcija duži. Homotetija. Trigonometrija. Razni zadaci.

Konstrukcija duži

1. U trouglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C')||p(A, B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom. Dokazati i obrnuto, ako su date dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$ tada je $p(E, F)||p(B, C)$.

2. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ} = \frac{SP'}{SQ'}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{SP}{PQ}$.

3. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80°$ izračunati $\measuredangle ADC$.

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao 2:1. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SD = 3\,cm$ izračunati AD.

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

6. Data je duž a. Konstruisati duž $x = a^2$.

7. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a^2 + b^2$.

8. Date su duži a i b. konstruisati duž x ako se zna da je $x : (b - a) = (2b - a) : (b + a)$.

9. Datu duž a podjeliti u omjeru 2:3.

10. Datu duž b podjeliti u omjeru 1:3.

11. Dati su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru 2:1. Ako je $\measuredangle ABC = 80°$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

12. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 2 : 3$. Ako je $P_{\triangle ADE} = 2\,cm^2$ odrediti $P_{\triangle ABC}$.

13. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 4 : 3$. Ako je $O_{\triangle ADE} = 8\,cm$ odrediti $O_{\triangle ABC}$

Homotetija

14. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom
a) k=2
b) k=$-\frac{2}{3}$

15. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom
a) k=$\frac{2}{5}$
b) k=$\frac{1}{3}$
Ako je $P_{\triangle ABC} = 56\,cm^2$ i $O_{\triangle ABC} = 30\,cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

16. Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom
(a) k=$-\frac{1}{2}$
(b) k=$\frac{2}{3}$
Odrediti omjer površina i obima kružnica.

17. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

18. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

19. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

20. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

21. Konstruisati duž $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Trigonometrija

22. (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$.

23. (Sinusna teorema) Dat je raznostrañični trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $\frac{sin\,\alpha}{a} = \frac{sin\,\beta}{b} = \frac{sin\,\gamma}{c}$.

24. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $a = 2R\,sin\alpha$, $b = 2R\,sin\beta$ i $c = 2R\,sin\gamma$.

25. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

26. Neka je AD visina trougla $\triangle ABC$ i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.

Razni zadaci

27. (Menelaus-ova teorema) Neka je dat trougao $\triangle ABC$ i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. Dokazati.

28. Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$, a I centar upisane kružnice. Dokazati da je $AI : IA_1 = (AB + AC) : BC$.

29. A_1, B_1, C_1 i D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata

$\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\dfrac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

30. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ je $CH : HC_1 = 3 : 1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Kokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

31. Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A, B)$ $(A \in k_1,\ B \in k_2)$. M je tačka na pravoj $p(C, D)$ $(C \in k_1,\ D \in k_2)$ takva da je $C - M - D$ i $p(C, D)||p(A, B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A, C)$ i $p(B, D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

32. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Koje su moguće veličine za uglove u trouglu $\triangle ABC$.

33. (zadatak 25, drugi put) Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

34. (Menelaus-ova teorema, drugi put) Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

35. Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$ konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

(a) Dokazati da je $\triangle MSN$jednakostraničan.

(b) Površinu trougla $\triangle MSN$ izraziti kao funkciju dužine stranice $\triangle ABC$ i ugla $\measuredangle ACS$.

36. U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC i tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL||AC$.

37. (Teorema Čevija) Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

38. Dokazati da se

(a) težišnice

(b) visine

(c) simetrale uglova

trougla sijeku u istoj tački.

39. Neka su $p(A, A_1)$, $p(B, B_1)$ i $p(C, C_1)$ tri prave trougla $\triangle ABC$ koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi $\dfrac{RA_1}{AA_1} + \dfrac{RB_1}{BB_1} + \dfrac{RC_1}{CC_1} = 1$.

40. Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

41. (Ojlerova prava) Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru 2:1.

Napomena: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

42. Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici.

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnicadevet tačaka.

43. Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\dfrac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

Zadaci za vježbu

44. U trouglu $\triangle ABC$ duž $DE||AC$, $T \in DE$ (T je težište trougla), $E \in AB$ i $D \in BC$. Ako je $P_{\triangle ABC} = 1\,cm^2$ izračunati $P_{\triangle BDE}$.

45. Visina i težišna linija povučene iz istog tjemena trougla dijele ugao trougla pri tom tjemenu na četiri podudarna ugla. Odrediti uglove trougla.

46. Simetrale uglova A, B i C trougla ABC sijeku se u tački S i sijeku opisanu kružnicu oko trougla redom u tačkama A_1, B_1 i C_1. Dokazati da je:

(a) $AB_1 = B_1C = B_1S$;

(b) prava B_1C_1 je simetrala duži AS.

47. Duž koja spaja sredine lukova AB i AC kružnice opisane oko trougla ABC siječe stranice AB i AC u tačkama K i L, redom. Dokazati da su tačke A, K, L i centar upisane kružnice u trougao ABC - tjemena jednog romba.

48. Tačka M je sredina jednog od lukova AC kružnice opisane oko trougla ABC, a D je druga tačka presjeka prave BC i kružnice sa centrom u tački M i poluprečnikom MA. Dokazati da je $CD = BC - AB$.

49. U kružnicu je upisan konveksni petougao čiji su svi uglovi međusobno podudarni. Dokazati da su i sve stranice tog petougla podudarne.

50. Pravilan desetougao $ABCDEFGHIJ$ upisan je u kružnicu poluprečnika r. Dokazati da je $AD - AB = r$.

51. U trougao ABC $(AB \neq BC)$ upisan je kvadrat, tako da mu dva tjemena pripadaju stranici AB. Dokazati da je trougao ABC pravougli, sa pravim uglom kod C, ako i samo ako simetrala ugla kod tjemena C prolazi kroz centar kvadrata.

52. Dokazati da su u pravouglom trouglu ABC rastojanja tjemena oštrog ugla A od centra dvije spolja upisane kružnice, od kojih jedna dodiruje hipotenuzu AB, a druga katetu BC -međusobno jednaka.

53. Dokazati da kružnica opisana oko trougla polovi duži koje spajaju centar upisane sa centrima spolja upisanih kružnica.

54. Kružnica sa centrom O na osnovici AC jednakokrakog trougla ABC dodiruje krake trougla. Povučena je tangenta kružnice koja siječe krake AB i BC redom u tačkama M i N. Dokazati da su trouglovi AMO, MON i NOC međusobno slični.

55. Dokazati da je trapez tangentan ako i samo ako se kružnice konstruisane nad njegovim bočnim stranicama kao nad prečnicima dodiruju.

56. Dvije kružnice se dodiruju spolja. Dokazati da je četverougao čija su tjemena tačke dodira zajedničkih spoljašnjih tangenti te dvije kružnice tangentan.

57. Dokazati da su duži određene tačkama dodira naspremnih stranica tangentnog četverougla i njemu upisane kružnice podudarne ako i samo ako su u tom četverouglu podudarna dva naspramna ugla.

58. Ako neka kružnica dodiruje produžetke stranica konveksnog četverougla, tada je razlika jednog para naspramnih stranica tog četverougla jednaka razlici drugog para naspramnih stranica.

59. Konveksan četverougao ima osobinu da postoji kružnica koja dodiruje njegove stranice (upisana kružnica) i postoji kružnica koja dodiruje produžetke njegovih stranica. Dokazati da su dijagonale toga četverougla uzajamno normalne.

60. Duž AB je prečnik kružnice k. Neka je k_1 kružnica sa centrom u tački A koja siječe kružnicu k u tačkama C i D. Neka je M proizvoljna tačka kružnice k_1, a N, P i Q redom druge tačke presjeka pravih MB, MC i MD sa kružnicom k. Dokazati da je četverougao $MPBQ$ paralelogram.

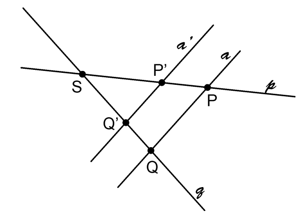
Euklidska geometrija 2

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?

2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).

3. Ugao između tangente i tetive jednak je peri...

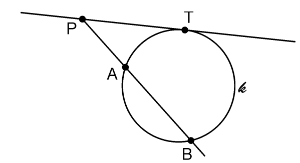
4. Talesova teorema glasi: Neka su... (vidi sliku)... Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square}$.



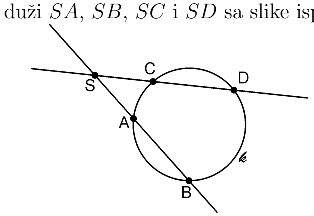
5. Poljedica talesove teoreme: $\frac{SP}{SQ} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{\square}{\square}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{\square}{\square}$.

6. Obrat Talesove teoreme glasi: $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square} \Rightarrow a \| a'$.

7. Neka je prava $p(P,T)$ tangenta na krug k. U kakvom su odnosu duži PT, PA i PB sa slike ispod?

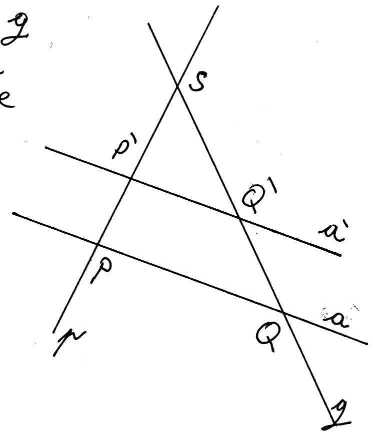


8. Neka su date dvije prave koje se sijeku u tački S i koje sijeku krug k u tačkama A, B, C i D. U kakvom su odnosu duži SA, SB, SC i SD sa slike ispod?



Prisjetimo seTalesove teoreme

Talesov teorem: Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' međusobno paralelne prave tada je $\frac{SP}{SP'}=\frac{SQ}{SQ'}=\frac{PQ}{P'Q'}$.

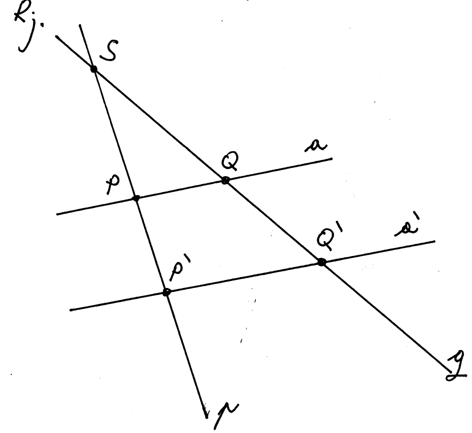


Obrat talesove teoreme:

$$\frac{SP}{SP'}=\frac{SQ}{SQ'}=\frac{PQ}{P'Q'} \Rightarrow a \parallel a'$$

2. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ}=\frac{SP'}{SQ'}$, $\frac{SP'}{PP'}=\frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'}=\frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'}=\frac{SP}{PQ}$.

Rj.



Prema talesovoj teoremi znamo da je

$$\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ}=\frac{P'Q'}{PQ}$$

a) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SQ}{SP}=\frac{SQ'}{SP'} \Rightarrow \frac{SP}{SQ}=\frac{SP'}{SQ'}$ q.e.d.

b) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{SP'}=\frac{SQ}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP}{SP'}-1=\frac{SQ}{SQ'}-1$

$\Rightarrow \frac{SP-SP'}{SP'}=\frac{SQ-SQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{PP'}{SP'}=\frac{QQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP'}{PP'}=\frac{SQ'}{QQ'}$ q.e.d.

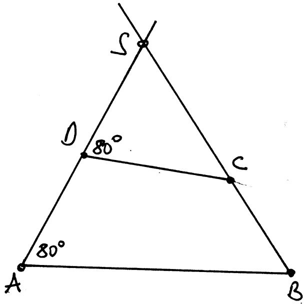
c) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP'}{SP}-1=\frac{SQ'}{SQ}-1 \Rightarrow \frac{SP'-SP}{SP}=\frac{SQ'-SQ}{SQ}$

$\Rightarrow \frac{PP'}{SP}=\frac{QQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{PP'}=\frac{SQ}{QQ'}$ q.e.d.

d) $\frac{SP'}{SP}=\frac{P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{SP'}{P'Q'}=\frac{SP}{PQ}$ q.e.d.

3. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80^\circ$ izračunati $\measuredangle ADC$.

Rj.



Kako je $SA:SD = SB:SC \overset{OTT}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$.

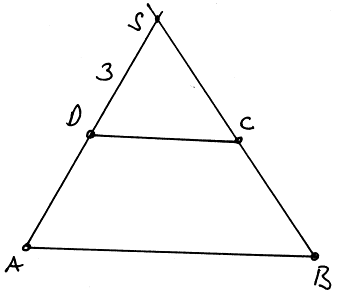
$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle CDS = 80^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 100^\circ$

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao $2:1$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SD = 3$ cm izračunati AD.

Rj.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$$p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{TT}{\Longrightarrow} \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$SA = 2SD$

$SA = 6$ cm $\Rightarrow AD = 3$ cm

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

Rj.

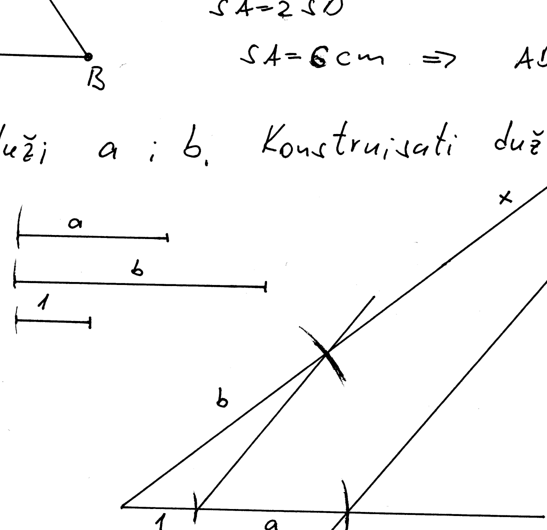
$x = a \cdot b$

$\frac{x}{b} = a$

$\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$

$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$



6. Data je duž a. Konstruisati duž $x = a^2$.

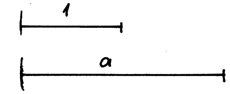
Rj.

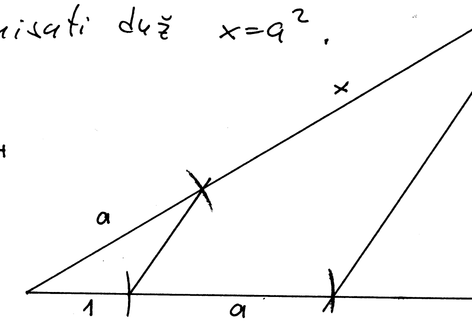
$x = a^2$

$x = a \cdot a$

$\frac{x}{a} = \frac{a}{1}$

$\frac{1}{a} = \frac{a}{x}$





7. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a^2 + b^2$.

Up. $x = a^2 + b^2$

$x = x_1 + x_2$ gdje su $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$.

8. Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako se zna da je $x : (b-a) = (b-a) : (b+a)$.

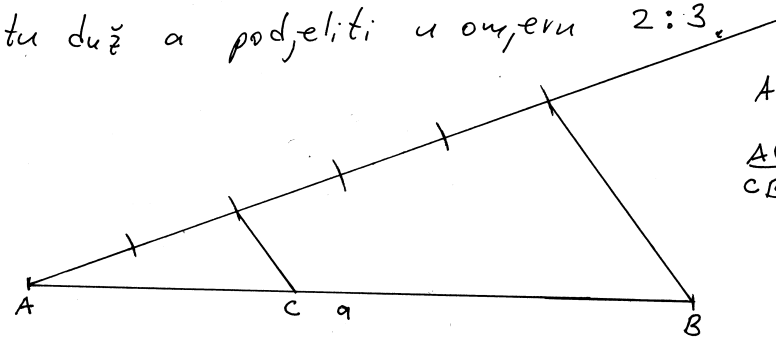
Uputa:

Ako stavimo $b - a = c$, $b + a = d$ imamo

$$\frac{x}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{c}{x}.$$

9. Datu duž a podijeliti u omjeru $2:3$.

Rj.

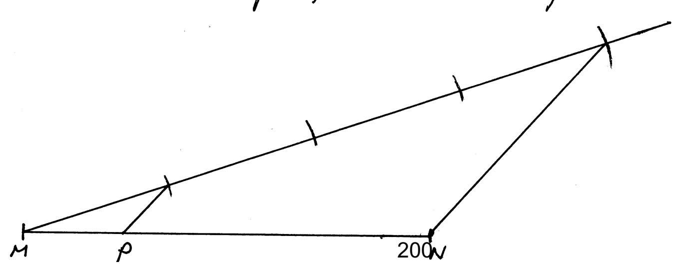


$AB = a$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$$

10. Datu duž b podijeliti u omjeru $1:3$.

Rj.



$MN = b$

$$\frac{MP}{PN} = \frac{1}{3}$$

11. Dati su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru 2:1. Ako je $\measuredangle ABC = 80°$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

Rj. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \overset{\text{slič. SSS}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

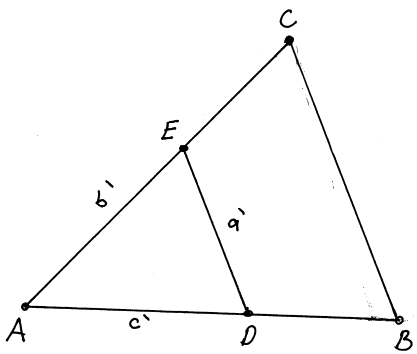
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 80°$$

Uglovi u trouglovima su podudarni, a kako ne znamo $\measuredangle BAC$ to ne možemo odrediti $\measuredangle B'A'C'$.

12. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 3 : 2$. Ako je $P_{\Delta ADE} = 2\ cm^2$ odrediti $P_{\Delta ABC}$.

Rj.



$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{3} = \frac{BC}{DE}$

(jasno je da $p(D,E) \parallel p(B,C)$)

$AD = \frac{3}{5} AB$, $AE = \frac{3}{5} AC$

i $DE = \frac{3}{5} BC$.

$s' = \frac{AD + AE + DE}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3}{5} s$

$P_{\Delta ADE} = \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$

$P_{\Delta ADE} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 P_{\Delta ABC} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{25}{9} = \frac{50}{9}\ cm^2$

13. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 4 : 3$. Ako je $O_{\Delta ADE} = 8$ cm odrediti $O_{\Delta ABC}$.

Rj. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{4}{3} \Rightarrow p(D,E) \parallel p(B,C) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{4} = \frac{BC}{ED}$

$AD = \frac{4}{7} AB$, $AE = \frac{4}{7} AC$, $DE = \frac{4}{7} BC$

$O_{\Delta ADE} = a' + b' + c' = \frac{4}{7} O_{\Delta ABC} \Rightarrow O_{\Delta ABC} = \frac{7}{4} \cdot 8 = 14$ cm

Homotetija

$$\mathcal{H}_{A,k}(M) \to M'$$

Homotetija $\mathcal{H}_{A,k}$ (gdje je A centar homotetije, a k koeficijent homotetije) je transformacija ravni koja svakoj tački M u ravni pridružuje neku tačku M' tako da su tačke A, M i M' kolinearne pri čemu:

a) za $k>0$ vrijedi poredak $A-M-M'$ ili $A-M'-M$ (M i M' su sa iste strane tačke A), $\frac{AM'}{AM} = k$.

b) za $k<0$ tačka A je između M i M'

$$\frac{AM'}{AM} = |-k|$$

(Udaljenost M' do A je $AM' = |k| \cdot AM$)

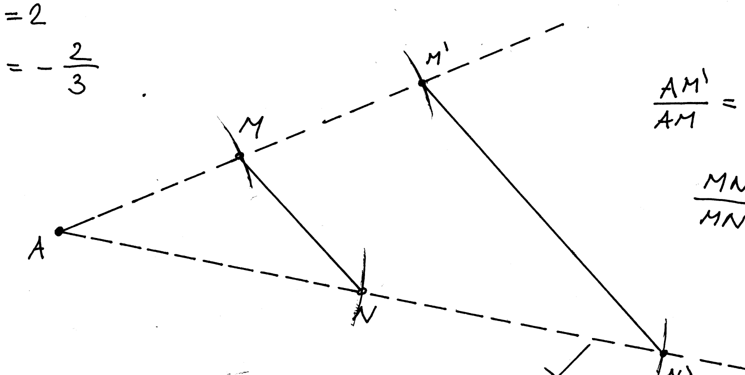
14. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

a) $k=2$

b) $k = -\frac{2}{3}$

Rj.

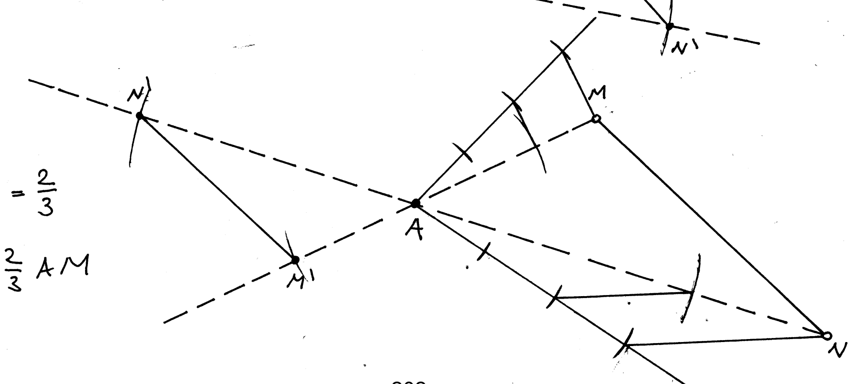
a)



$\frac{AM'}{AM} = 2$

$\frac{MN'}{MN} = 2$

b)



$\frac{AM'}{AM} = \frac{2}{3}$

$AM' = \frac{2}{3} AM$

Primjetite da:

homotetija sa koeficijentom -1 je centralna simetrija

homotetija sa koeficijentom 1 je identitet

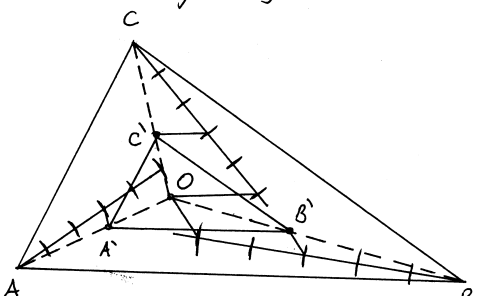
15. Dat je ΔABC i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

a) $k=\frac{2}{5}$

b)^v $k=\frac{1}{3}$.

Ako je $P_{\Delta ABC}=56\ cm^2$ i $O_{\Delta ABC}=30\ cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

Rj. a)



$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{2}{5}$$

Na osnovu 13 zadatka:

$$\frac{P_{\Delta A'B'C'}}{P_{\Delta ABC}}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P_{\Delta A'B'C'}=\frac{4}{25}\cdot 56=\frac{224}{25}\ cm^2$$

Na osnovu 14 zadatka

$$\frac{O_{\Delta A'B'C'}}{O_{\Delta ABC}}=\frac{2}{5} \Rightarrow O_{\Delta A'B'C'}=\frac{2}{5}\cdot 30=12\ cm.$$

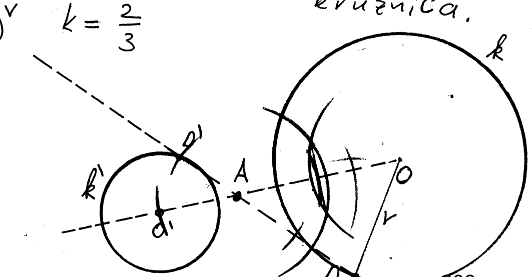
16. Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom

a) $k=-\frac{1}{2}$

b)^v $k=\frac{2}{3}$

Odrediti omjer površina i obima kružnica.

Rj. a)



$O=2r\pi$ $\quad P=r^2\pi$

$O'=2r'\pi$ $\quad P'=r'^2\pi$

$$\frac{AO'}{AO}=\frac{AD'}{AD}=\frac{r'}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{O'}{O}=|k| \qquad \frac{P'}{P}=\frac{r'^2\pi}{r^2\pi}$$

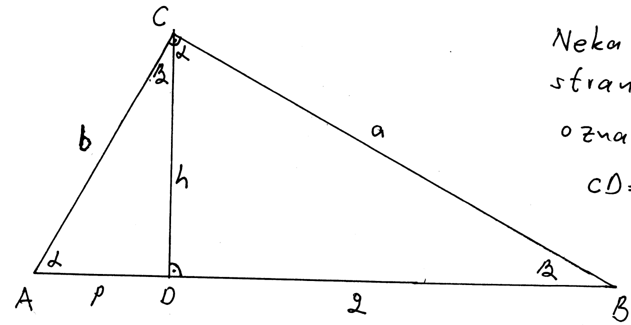
$$\frac{P'}{P}=|k|^2$$

Primjetite da:

- obimi homotetičnih figura se odnose kao $|k|$
- površine homotetičnih figura se odnose kao k^2
- izometrična preslikavanja (identitet, osna simetrija, centralna simetrija) čuvaju dužinu
- homotetija čuva uglove

17. U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \dots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \dots(2)$$

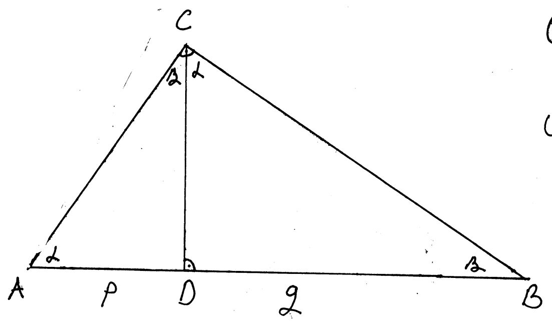
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

18. U pravouglom trouglu ΔABC, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD=p$, $BD=q$ dokazati da je $CD=\sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake
$\measuredangle CAD=\alpha$; $\measuredangle ABC=\beta$
U ΔADC kako je
$\measuredangle DAC=\alpha$, $\measuredangle ADC=90°$
$\Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$
Slično $\measuredangle DCB=\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ADC=\measuredangle CDB=90°\\ \measuredangle CAD=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle DCA=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

$$\Downarrow$$

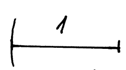
$$\frac{CD}{q}=\frac{p}{CD} \Rightarrow CD^2=pq$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{pq}$$

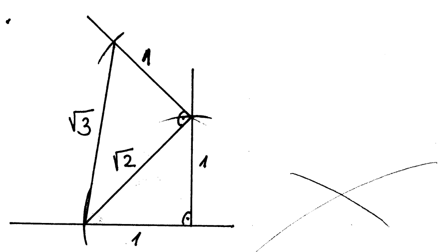
q.e.d.

19. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

Rj.

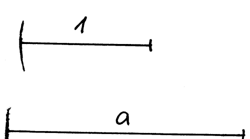


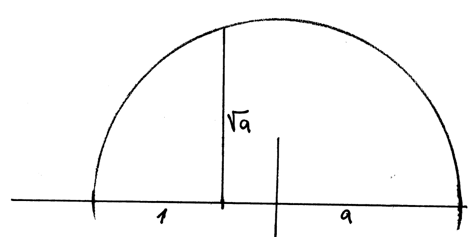
jedinična duž



20. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

Rj.





21. Konstruisati duž $x=\frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Rj.

$$x=\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

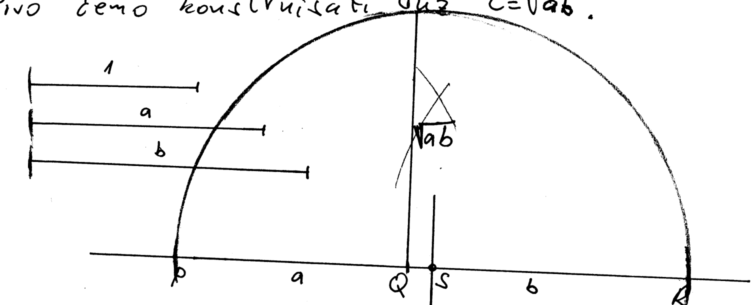
$$c=\sqrt{ab}$$

$$x=\frac{c}{a}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{c}{a}$$

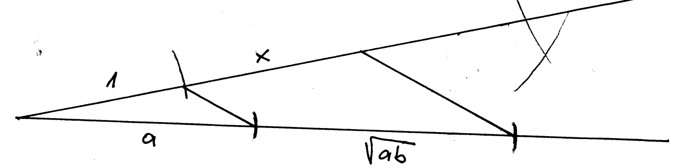
$$\frac{a}{c}=\frac{1}{x}$$

Prvo ćemo konstruisati duž $c=\sqrt{ab}$.



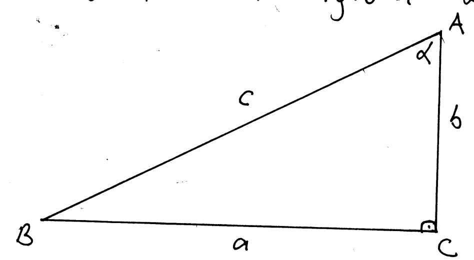
$PQ=a$
$QR=b$

S - centar kružnice



Trigonometrija

U pravouglom trouglu ΔABC sa kracima a, b, hipotenuzom c i uglom $\alpha=\measuredangle BAC$ definišemo



$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$

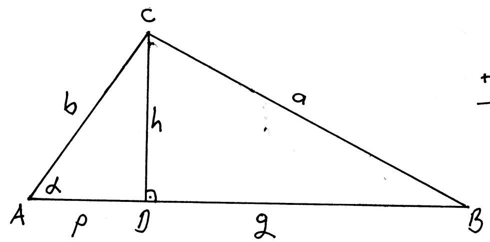
$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b}$$

22. (Kosinusna teorema)

Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha=\measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

Rj. Sa $CD=h$ označimo visinu spuštenu na stranicu $AB=c$. Označimo sa p duž AD a sa q duž DB.



$$a^2 = h^2 + g^2$$
$$+\; h^2 = b^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + g^2 - p^2$$
$$g^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2 = c^2 - 2pc$$

Imamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$, kako je $\cos\alpha = \frac{p}{b}$

tj. $p = b\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

23. (Sinusna teorema)

Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Dokazati da je $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

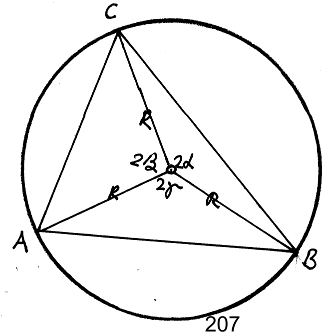
Uputa:

Ako uvedemo oznake kao u prethodnom zadatku imamo: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, $\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{h}{b}}{\frac{h}{a}}$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \;\ldots$$

24. Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$. Dokazati da je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$.

Uputa:



(#) Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90°$

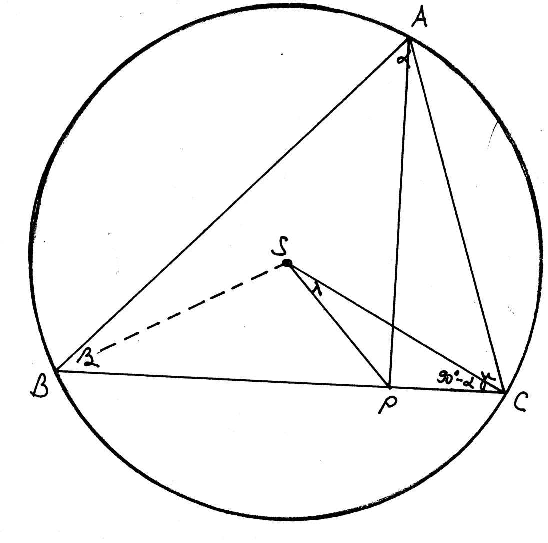
Rj.

Označimo sa $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ i $\lambda = \sphericalangle CSP$.

Treba dokazati da je $\alpha + \lambda < 90°$.

Primjetimo da je $\sphericalangle BSC = 2\alpha$ i kako je ΔABC jkk $(BS = CS = R)$

$\Rightarrow \sphericalangle BCS = 90° - \alpha$.



$AB = 2R\sin\gamma$, $AC = 2R\sin\beta$, $\cos\beta = \frac{BP}{AB}$, $\cos\gamma = \frac{PC}{AC}$

$$BP - PC = AB\cos\beta - AC\cos\gamma = 2R\sin\gamma\cos\beta - 2R\sin\beta\cos\gamma =$$
$$= 2R(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta) = 2R\sin(\gamma - \beta)$$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30°$ tj. $\gamma - \beta \geq 30°$

$30° \leq \gamma - \beta < \gamma < 90° \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) < 1 \Rightarrow BP - PC \geq R$

tj. $BP \geq PC + R$. Na osnovu nejednakosti trougla

$$PS + R = PS + BS > BP \geq PC + R \Rightarrow PS > PC,$$

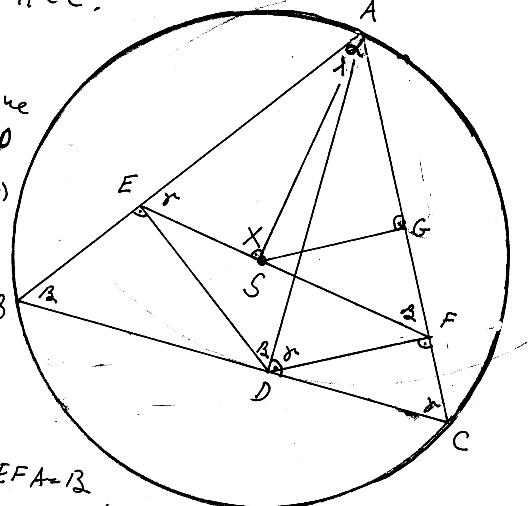
pa u ΔPCS imamo $\sphericalangle PCS > \sphericalangle PSC$ tj.

$$90° - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90°$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90°$$

q.e.d.

Neka je AD visina trougla $\triangle ABC$ i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.



Rj. Neka je S centar opisane kružnice $\triangle$. Posmatrajmo $\triangle ABD$

$\measuredangle ABD = \beta$, $\measuredangle BDA = 90^\circ$, $\measuredangle BAD = \lambda$ ...(*)

Posmatrajmo $\triangle AED$.

$\measuredangle AED = 90^\circ$, $\measuredangle DAE = \lambda \overset{(*)}{\Longrightarrow} \measuredangle ADE = \beta$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AED = 90^\circ\\ \measuredangle AFD = 90^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \square AEDF \text{ tetivni}$$

pa je $\measuredangle EDA = \measuredangle EFA = \beta$.

U $\triangle AEF$ imamo $\measuredangle FAE = \alpha$, $\measuredangle EFA = \beta$
$\Longrightarrow \measuredangle AEF = \gamma$. Primjetimo da je i $\measuredangle ADE = \gamma$ ($\square AEDF$ tetivni)

$\sin\beta = \frac{AD}{AB}$, $\sin\gamma = \frac{AF}{AD}$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$

$\triangle ABC \sim \triangle AEF$ (imaju sva tri podudarna ugla), pa je

$$\frac{AB}{AF} = \frac{\frac{AD}{\sin\beta}}{AD\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \frac{2R\cdot 2R}{b\cdot c} = \frac{\frac{abc}{2P}\cdot 2R}{bc} = \frac{a\cdot 2R}{2P} = \frac{a\,2R}{a\cdot AD} = \frac{2R}{R\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ako iz S spustim visinu SG na AC primjetimo da je $\measuredangle ASG = \beta$ ($\measuredangle ASC = 2\beta$) pa je $\measuredangle GAS = 90^\circ - \beta$.

Neka je AX visina $\triangle AEF$. Zbog uočene sličnosti

$\frac{AD}{AX} = \sqrt{2} \Longrightarrow AX = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = R$.

Primjetimo da je $\measuredangle FAX = 90^\circ - \beta$.

$$\left.\begin{array}{l}AF \cong AF\\ \measuredangle FAX \cong \measuredangle FAS\\ AX \cong AS = R\end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle FAX \cong \triangle FAS$$

$\Downarrow$

$S \equiv X \Longrightarrow S \in EF$

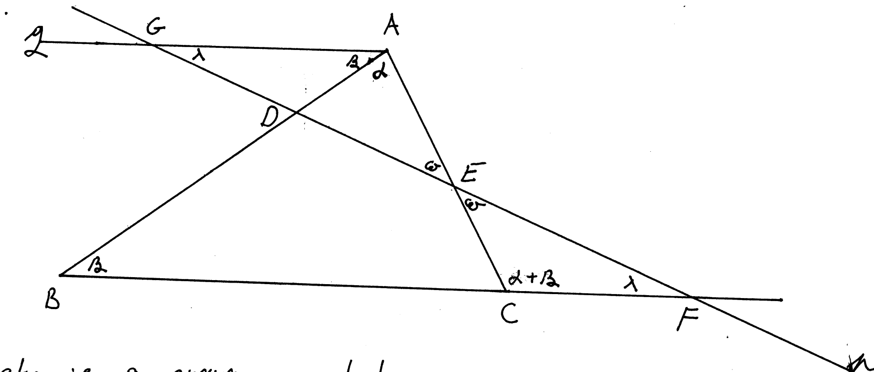
q.e.d.

(Menelaus-ova teorema)

Neka je dat trougao $\triangle ABC$ i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je

$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE} = 1$. Dokazati.

Rj.



Neka je q prava paralelna sa $p(B,C)$ i $\{G\} = p \cap q$

$p(B,C) \parallel p(A,G)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Longrightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAG = \beta$

$p(B,C) \parallel p(A,G)$ i $p(F,G)$ transferzala $\Longrightarrow \measuredangle BFD \cong \measuredangle AGD = \lambda$

$\measuredangle BAC = \alpha \Longrightarrow \measuredangle EAG = \alpha + \beta$

$\measuredangle FCD$ vanjski ugao $\triangle ABC \Longrightarrow \measuredangle FCE = \alpha + \beta$.

Posmatrajmo $\triangle ECF$ i $\triangle EAG$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AGE \cong \measuredangle CFE = \lambda\\ \measuredangle GEA \cong \measuredangle FEC = \omega \text{ (unakrsni uglovi)}\\ \measuredangle EAG \cong \measuredangle ECF = \alpha + \beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \triangle EAG \sim \triangle ECF$$

$\Downarrow$

$\frac{AG}{CF} = \frac{AE}{CE}$

tj. $\frac{AG}{CF}\cdot\frac{CE}{AE} = 1$ ...(*)

Posmatrajmo $\triangle DAG$ i $\triangle BFD$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AGD \cong \measuredangle BFD = \lambda\\ \measuredangle GDA \cong \measuredangle FDB \text{ (unakrsni)}\\ \measuredangle DAG \cong \measuredangle DBF = \beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \triangle AGD \sim \triangle BFD$$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{BD} = \frac{AG}{BF} \Longrightarrow \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{AG} = 1$ ...(**)

Iz (*) i (**) $\Longrightarrow \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE} = 1$

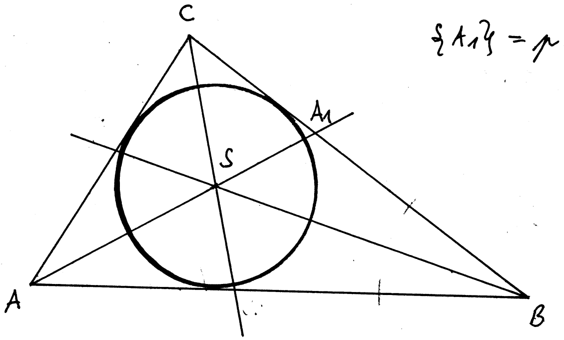
q.e.d.

Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$ a S centar upisane kružnice. Dokazati da je $AS : SA_1 = (AB+AC) : BC$

Rj.

Označimo sa S centar upisane kružnice trougla

$\{A_1\} = p(A,S) \cap BC$



Dokažimo da je $\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$.

$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} \ldots(*)$, $\quad \frac{AS}{SA_1} = \frac{AC}{CA_1} \ldots(**)$, $\quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\frac{BA_1}{CA_1}$ i $AC = AB\frac{CA_1}{BA_1}$

$$(*)+(**) \Rightarrow 2\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} + \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB\cdot\frac{BC}{BA_1} + AC\cdot\frac{BC}{CA_1}}{BC} =$$

$$= \frac{AB\cdot\frac{BA_1+CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1+CA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{AB\left(1+\frac{CA_1}{BA_1}\right) + AC\left(1+\frac{BA_1}{CA_1}\right)}{BC}$$

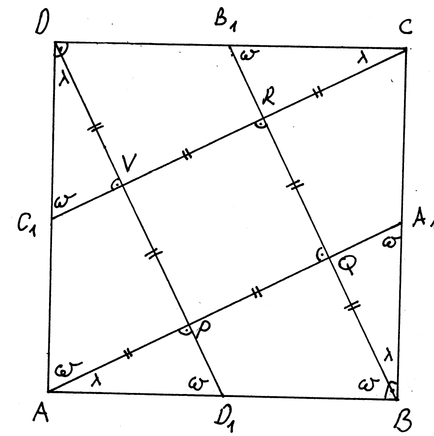
$$= \frac{AB+AC+AB\frac{CA_1}{BA_1}+AC\frac{BA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{2AB+2AC}{BC}$$

tj. $2\frac{AS}{SA_1} = 2\frac{AB+AC}{BC} \Rightarrow \frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$

q.e.d.

A_1, B_1, C_1, D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata $\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\frac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

Rj.



Označimo sa

$\{P\} = DD_1 \cap AA_1$,
$\{Q\} = AA_1 \cap BB_1$
$\{R\} = BB_1 \cap CC_1$
$\{V\} = CC_1 \cap DD_1$

Dokažimo da je $\square PQRV$ kvadrat i da je $PQ = \frac{2}{5}A$.

$DC \cong AB$, $\angle ABA_1 \cong \angle CDC_1 = 90^\circ$, $DC_1 \cong A_1B$ $\xrightarrow{SUS}$ $\triangle CDC_1 \cong \triangle ABA_1$ $\Downarrow$ $\angle C_1CD \cong \angle A_1AB = \lambda$ i $\angle DC_1C \cong \angle BA_1A = \omega$

Primjetimo da je $\lambda + \omega = 90^\circ \Rightarrow \angle DAA_1 = \omega \Rightarrow p(C,C_1) \parallel p(A,A_1)$.

$AD = DC$, $\angle DAD_1 = \angle CDC_1 = 90^\circ$, $AD_1 = DC_1$ $\xrightarrow{SUS}$ $\triangle DAD_1 \cong \triangle CDC_1$ $\Downarrow$ $\angle ADD_1 = \angle C_1CD = \lambda$ i $\angle AD_1D = \angle DC_1C = \omega$

$\Rightarrow \angle C_1VD \cong \angle D_1PA = 90^\circ$, $\quad AD \cong BC$, $\angle DAD_1 \cong \angle BCB_1 = 90^\circ$, $AD_1 \cong CB_1$ $\xrightarrow{SUS}$ $\triangle DAD_1 \cong \triangle BCB_1$ $\Downarrow$ $\angle ADD_1 \cong \angle B_1BC = \lambda$ i $\angle AD_1D \cong \angle CB_1B = \omega$

pa je $\angle ABB_1 = \omega \Rightarrow p(D,D_1) \parallel p(B,B_1)$.

Kako je $\angle BQA_1 = \angle CRB_1 = 90^\circ \Rightarrow \square PQRV$ pravougaonik

$p(B,B_1) \parallel p(D,D_1) \xrightarrow{T.T_0} \frac{CB_1}{DB_1} = \frac{CR}{RV} \Rightarrow CR = RV \Rightarrow R$ sredina duži VC

$p(A,A_1) \parallel p(C,C_1) \xrightarrow{T.T_0} \frac{DC_1}{AC_1} = \frac{DV}{VP} \Rightarrow DV = VP \Rightarrow V$ sredina duži DP.

Kako su $\triangle APD$ i $\triangle CDV$ podudarni $\Rightarrow PD \cong CV \Rightarrow PV = RV$

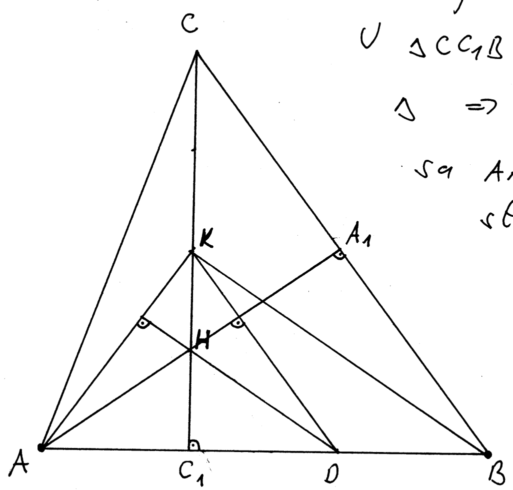
$\Rightarrow \square PQRV$ kvadrat q.e.d.

$p(D,D_1) \parallel p(B,B_1) \xrightarrow{T.T_0} \frac{BQ}{PD_1} = \frac{AB}{AD_1} = 2 \Rightarrow BQ = 2PD_1$ a kako $BQ = VP$ $\rightarrow (AA_1 \cong BB_1 \cong CC_1 \cong DD_1)$

$\Rightarrow DD_1 = 5PD_1 \Rightarrow VP = PQ = QR = RV = \frac{2}{5}DD_1$ q.e.d.

U oštrouglom trouglu ΔABC je $CH:HC_1 = 3:1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Dokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

Rj. $\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$. Dokažimo da je $\measuredangle AKB = 90°$.



Neka je tačka D sredina duži BC_1.
U ΔCC_1B, KD je srednja linija $\Delta \Rightarrow KD \parallel BC$, pa ako sa AA_1 označimo visinu na stranicu BC imamo $AA_1 \perp KD$.

U ΔADK, H je ortocentar trougla pa je $p(D,H) \perp AK$. ...(*)

Iz $\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$ i $\frac{CK}{KC_1} = \frac{1}{1} \Rightarrow H$ sredina duži KC_1

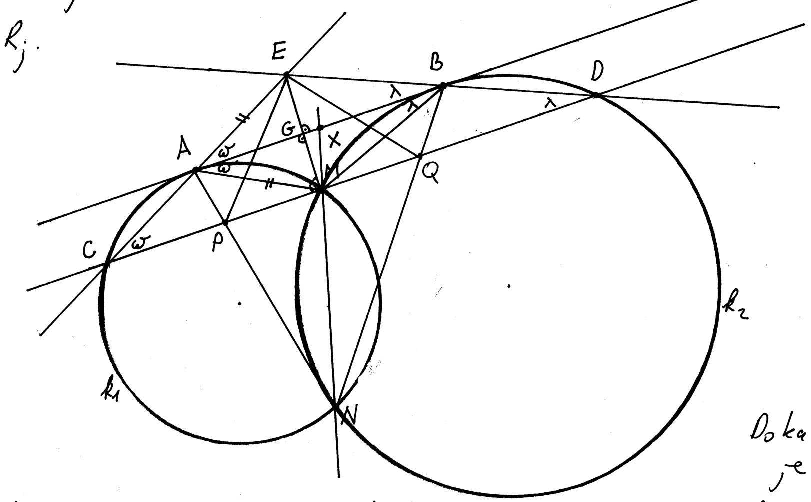
$$\frac{C_1H}{HK} = \frac{C_1D}{DB} = \frac{1}{1} \Rightarrow p(D,H) \parallel p(B,K)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle AKB = 90°$$

q.e.d.

Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A,B)$ $(A \in k_1, B \in k_2)$. M je tačka na pravoj $p(C,D)$ $(C \in k_1, D \in k_2)$ takva da je $C-M-D$ i $p(C,D) \parallel p(A,B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A,C)$ i $p(B,D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

Rj.



Dokažimo da je $PE = QE$.

Ugao između tangente i tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \measuredangle MDB = \measuredangle MBA = \lambda$; $\measuredangle ACM = \measuredangle BAM = \omega$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAM = \measuredangle EAB = \omega$.
$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,D)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BDM = \measuredangle EBA = \lambda$.

Trouglovi ΔAEB i ΔAMB imaju jednaka dva ugla λ i ω i zajedničku stranicu $AB \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta ABE \cong \Delta ABM$, Neka je $\{G\} = AM \cap AB$

$$\Downarrow$$
$$AE \cong AM$$

Trouglovi ΔAGE i ΔAGM imaju zajedničke dvije stranice i ugao između njih pa $\overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AGE \cong \Delta AGM$

$$\Downarrow$$
$$\measuredangle AGE \cong \measuredangle AGM = 90°$$

Kako je $EM \perp AB$ i $AB \parallel CD \Rightarrow EM \perp CD$. Dokažimo još da je $PM = QM$.
Neka je $\{X\} = p(M,N) \cap AB$.

$$XA^2 = XM \cdot XN = XB^2 \Rightarrow AX^2 = BX^2 \Rightarrow AX = BX$$

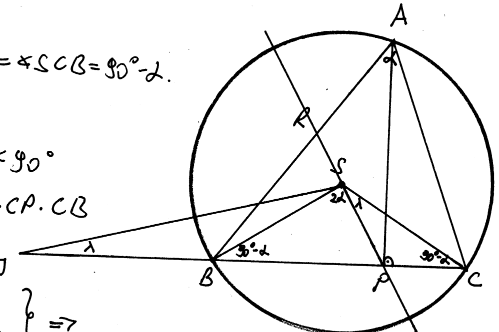
$$p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{ToTo}{\Longrightarrow} \frac{AX}{XB} = \frac{PM}{MQ} \Rightarrow PM = QM$$

U ΔPME i ΔQME iz SUS $\Rightarrow \Delta PME \cong \Delta QME \Rightarrow PE \cong QE$

q.e.d.

Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30^\circ$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90^\circ$.

Rj.



Primjetimo da je $\measuredangle SBC = \measuredangle SCB = 90^\circ - \alpha$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle CSP$.

Dokažimo da je $\alpha + \lambda < 90^\circ$

Prvo pokažimo da je $R^2 > CP \cdot CB$

$$\left.\begin{array}{l} CB = 2R \sin\alpha \\ CP = AC\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow CB \cdot CP = 4R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$$

Dovoljno je pokazati da je $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4}$.

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta < 1 \quad \ldots(1)$

$\frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) = \sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma \quad / \cdot(-1)$

$\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta \leq -\frac{1}{2} \quad \ldots(2)$

$(1)+(2)\quad \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4} \overset{\sin\alpha<1}{\Longrightarrow} \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma < \frac{1}{4}$

pa je $R^2 > CP \cdot CB \quad \ldots(*)$

I način

Izaberimo tačku J na $p(B,C)$ takvu da je $CJ \cdot CP = R^2$. Kako je $R^2 > CP \cdot CB \Rightarrow CJ > CB \Rightarrow \measuredangle SBC > \measuredangle SJC$.

$R^2 = SC^2 \Rightarrow \frac{SC}{CJ} = \frac{PC}{SC}$ pa iz sličnosti SUS $\Rightarrow \Delta JCS \sim \Delta SCP$

$\Downarrow$

$\measuredangle SJC \cong \measuredangle CSP = \lambda$

$\Rightarrow \lambda < \measuredangle SBC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha + \lambda < 90^\circ \Rightarrow \measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

II način

$BP \cdot PC = (R+SP)(R-SP) \Rightarrow BP \cdot PC = R^2 - SP^2$

$SP^2 = R^2 - BP \cdot PC \overset{(*)}{>} PC \cdot CB - BP \cdot PC = PC^2 \Rightarrow SP > PC$

Pa u $\Delta SPC \quad 90^\circ - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90^\circ$

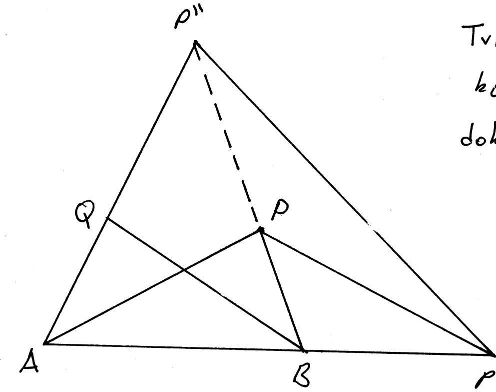
$\Downarrow$

$\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

U trouglu ΔABC, AP polovi $\measuredangle BAC$, sa tačkom P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$, sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60^\circ$ i da je $AB + BP = AQ + QB$. Naći uglove u Δ.

Rj. Označimo uglove u ΔABC sa α, β i γ. $\alpha = 60^\circ$. Produžimo AB do P' tako da je $BP' = BP$, i konstruišimo P'' na AQ tako da je $AP'' = AP'$. Tad je $\Delta BP'P$ jednakokraki sa uglom na bazi $\frac{\beta}{2}$. Kako je $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, slijedi da je $QP'' = QB$. Kako je $\Delta APP''$ jks i AP polovi ugao kod A, imamo $PP' = PP''$



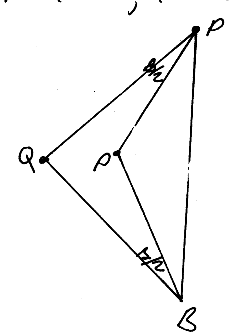
Tvrdnja: Tačke B, P, P'' su kolinearne, pa se $P'' \equiv C$.

dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji:

$\measuredangle PBQ = \measuredangle PP'B = \measuredangle PP''Q = \frac{\beta}{2}$.

Tako da imamo slučaj kao na slici, ili je P na drugoj strani BP''.

U bilo kojem slučaju, pretpostavka da je $\Delta BPP''$ raznostraničan vodi nas na $BP = PP'' = PP'$ pa zaključujemo da je $\Delta BPP''$ jks, i na kraju do apsurda da $\frac{\beta}{2} = 60^\circ$ pa $\alpha + \beta = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. #



Prema tome, tačke B, P, P'' su kolinearne i $P'' \equiv C$ q.e.d.

Kako je ΔBCQ jkk, imamo $120^\circ - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$ pa $\beta = 80^\circ$ i $\gamma = 40^\circ$.

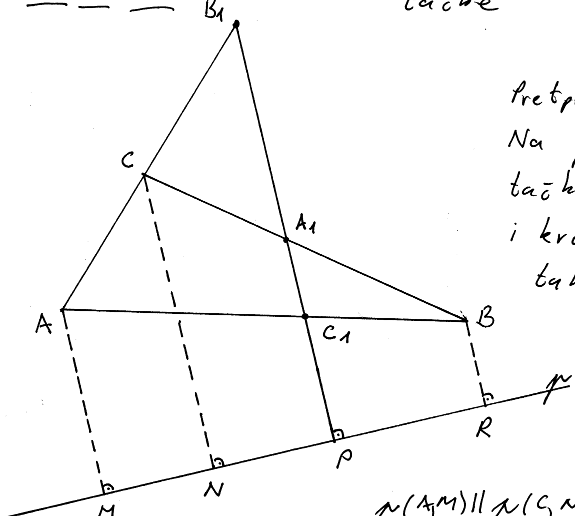
$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ tražene vrijednosti

(#) (Menelausova teorema, drugi put)

Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla ΔABC ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$.

Rj. potreban uslov

"$\Leftarrow$": A_1, B_1, C_1 kolinearne tačke $\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$.



Pretpostavimo $C_1\in AB$, $A_1\in BC$. Na polupravoj $pp[A_1,C_1)$ uzmimo tačku P tako da je A_1-C_1-P i kroz P postavimo pravu p takvu da je $p\perp p(A_1,C_1)$. Neka su M, N i R ortogonalne projekcije tačaka A, C i B redom.

$$p(A,M)\parallel p(C,N)\parallel p(B_1,P)\parallel p(B,R)\xRightarrow{\text{To } T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{MP}{PR},\quad \frac{BA_1}{CA_1}=\frac{PR}{PN},\quad \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{PN}{MP}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{MP}{PR}\cdot\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{MP}=1\Rightarrow\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$$

q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Rightarrow$": $\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$ ...(*) $\Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne

Ponovo, neumanjujući opštost pretpostavimo $C_1\in AB$ i $A_1\in BC$.

$p(A_1,B_1)\cap AB=\{C_2\}\Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_2 kolin. $\xRightarrow{\text{potreban uslov}}\frac{AC_2}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$

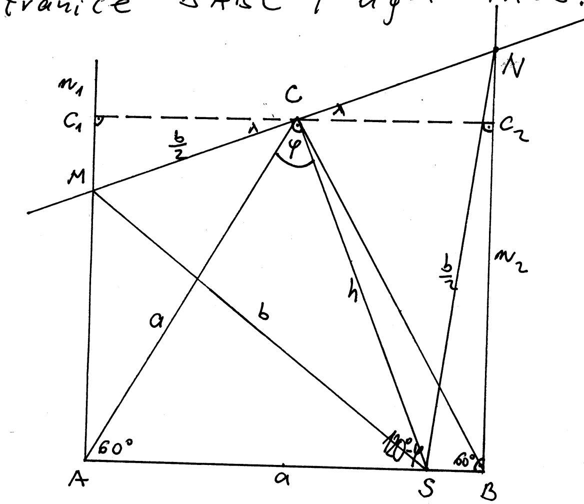
$\xRightarrow{(*)}\frac{AC_2}{BC_2}=\frac{AC_1}{BC_1}$, $C_1, C_2\in AB$ pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Rightarrow C_1\equiv C_2\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ kolinea. q.e.d.

(#) Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla ΔABC konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je proizvoljna prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

a) dokazati da je ΔMSN jednakostranični

b) površinu trougla ΔMSN izraziti kao f-ju dužine stranice ΔABC i ugla $\measuredangle ACS$.

Rj.



a) Dokažimo da je ΔMSN jks. Primjetimo da je tačka C jednako udaljena od normala n_1 i n_2 (C leži na simetrali stranice AB) pa iz pravila USU $\Delta MCC_1\cong\Delta NCC_2$

$\Downarrow$

$MC\cong CN$

$$\left.\begin{array}{l} MC\cong CN\\ \measuredangle MCS\cong\measuredangle NCS=90^\circ\\ CS\cong CS\end{array}\right\}\xRightarrow{SUS}\Delta MCS\cong\Delta NCS$$

$\Downarrow$

$MS\cong NS\Rightarrow\Delta MSN$ jkk

$\square CSBN$ je tetivni četverougao ($\measuredangle NCS+\measuredangle SBN=180^\circ$), pa ako posmatramo uglove koji gledaju na stranicu CS

$\Rightarrow\measuredangle SBC\cong\measuredangle SNC=60^\circ\Rightarrow\Delta MSN$ jks q.e.d.

b) $AB=AC=BC=a$, $\measuredangle ACS=\varphi\Rightarrow\measuredangle ASC=120^\circ-\varphi$, $CS=h$, $MS=NS=MN=b$

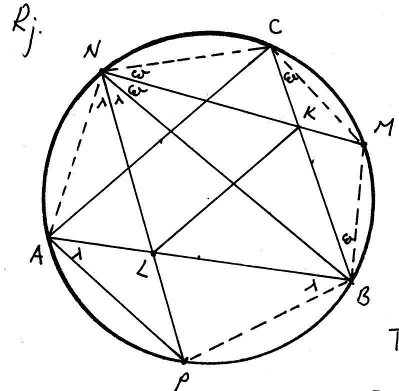
Površinu ΔMSN izrazimo preko AB i $\measuredangle ACS$.

$$P_{\Delta MSN}=\frac{b^2\sqrt3}{4},\quad h=\frac{b\sqrt3}{2},\quad\frac{a}{\sin(120^\circ-\varphi)}=\frac{h}{\sin 60^\circ}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt3}{2\sin(120^\circ-\varphi)}$$

$$\Rightarrow\frac{b\sqrt3}{2}=\frac{a\sqrt3}{2\sin(120^\circ-\varphi)}\Rightarrow b=\frac{a}{\sin(120^\circ-\varphi)}\Rightarrow P_{\Delta MSN}=\frac{a^2\sqrt3}{4\sin^2(120^\circ-\varphi)}$$

U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC u tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL \parallel AC$.

Rj.



Spojimo tačke B i N. Dokazaćemo da je $p(N,P)$ simetrala ugla $\measuredangle BNA$; da je $p(N,M)$ simetrala ugla $\measuredangle CNB$. Poslije toga ćemo pokazati da je $KL \parallel AC$.

Tačka P je središte luka AB $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP \cong BP \Rightarrow \triangle APB$ jkk. $(\measuredangle BAP = \measuredangle PBA = \lambda)$

$\square APBN$ je tetivni $\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle BNP = \lambda$ (nad tetivom BP)
i $\measuredangle PBA = \measuredangle PNA = \lambda$ (nad tetivom AP)
$\Rightarrow p(N,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ANB$.

Slično, M sredina luka $BC \Rightarrow \triangle BMC$ jkk $(\measuredangle MCB \cong \measuredangle CBM = \omega)$
$\square NBMC$ je tetivni $\Rightarrow p(N,M)$ je simetrala $\measuredangle CNB$.

Posmatrajmo $\triangle ABN$.
NL simetrala $\measuredangle BNA \Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{AN}{NB}$.
Posmatrajmo $\triangle NBC$
NK simetrala $\measuredangle CNB \Rightarrow \frac{CK}{KB} = \frac{NC}{NB}$

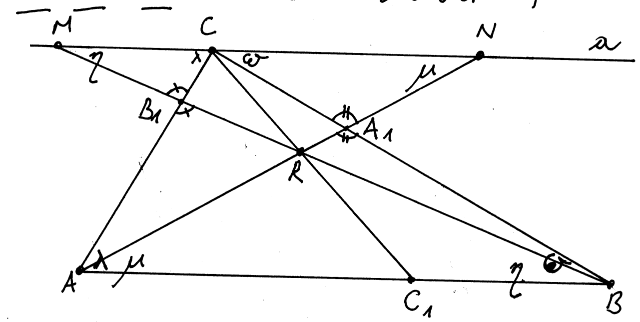
kako je $AN = NC$ (N sredina luka AC) $\Longrightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{CK}{KB}$

tj. $\frac{BL}{LA} = \frac{BK}{KC} \overset{OoToTo}{\Longrightarrow} KL \parallel AC$ q.e.d.

(Teorema Čevija) Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

Rj.

potreban uslov „$\Leftarrow$": AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački (recimo tački R) $\Longrightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

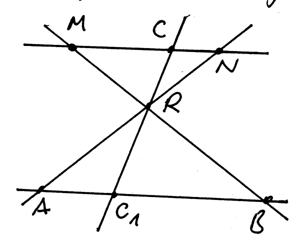


Neka je $a \parallel p(A,B)$, $C \in a$ i
$p(A,A_1) \cap a = \{N\}$
$p(B,B_1) \cap a = \{M\}$

Primjetimo da je $\triangle ABB_1 \sim \triangle CMB_1$ i $\triangle ABA_1 \sim \triangle NCA_1$

$\Downarrow$ $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MC}{AB}$ ...(*)

$\Downarrow$ $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{NC}$ ...(**)

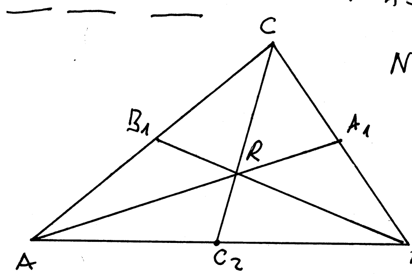


$\overset{ToTo}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{NC}{MC}$ ...(***)

$\overset{(*),(**)}{\Longrightarrow} \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MC}{AB} \cdot \frac{AB}{NC}$

$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$ q.e.d.

dovoljan uslov „$\Longrightarrow$": $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \Longrightarrow$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački.

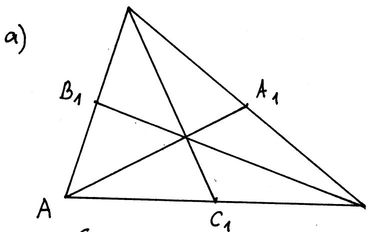


Neka je $AA_1 \cap BB_1 = \{R\}$ i $p(C,R) \cap AB = \{C_2\}$.
Prema potrebnom uslovu $\frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$ i
$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \Longrightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$
zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži $\Rightarrow C_1 \equiv C_2 \Rightarrow AA_1, BB_1$ i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

Napomena: Prave AA_1, BB_1 i CC_1 zovu se Čevijne prave.

Dokazati da se a) težišnice b) visine c) simetrale uglova trougla sijeku u istoj tački.

Rj. a)



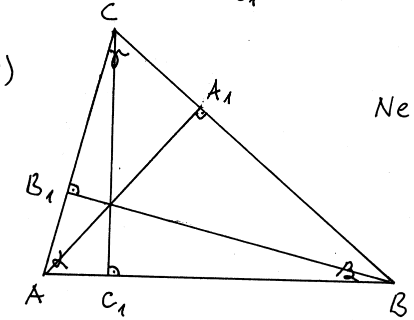
Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 težišnice ΔABC.

$$\frac{AC_1}{BC_1}=1,\ \frac{BA_1}{CA_1}=1,\ \frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teorema Čevija}}$$

AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

b)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ΔABC sa uglovima $\alpha=\sphericalangle CAB$, $\beta=\sphericalangle ABC$, $\gamma=\sphericalangle BCA$.

Primjetimo da je (sličnost UUU):

$$\Delta AC_1C\sim\Delta ABB_1,\quad \Delta BA_1A\sim\Delta BCC_1,\quad \Delta CAA_1\sim CB_1B$$

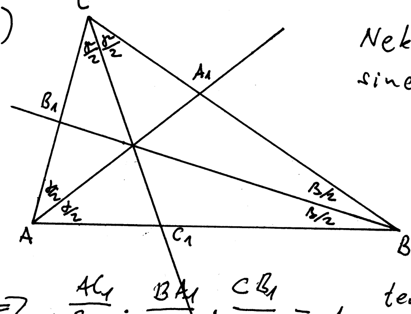
$$\Downarrow\qquad\qquad\Downarrow\qquad\qquad\Downarrow$$

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}\ (1)\qquad \frac{BA_1}{BC_1}=\frac{AB}{BC}\ (2)\qquad \frac{CB_1}{CA_1}=\frac{BC}{AC}\ (3)$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow \frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$$

$\xRightarrow{\text{teorema Čevije}}$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

c)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 duži koje leže na simetrali uglova trougla ΔABC.

Simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije.

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{BC}{AB},\quad \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teorema Čevije}}$$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

Neka su $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ tri prave trougla ΔABC koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi:

$$\frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1.$$

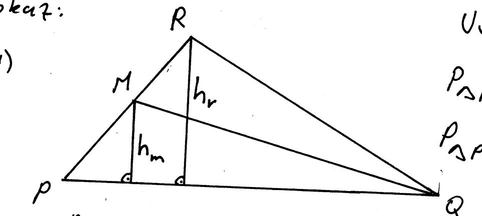
Rj. Prije nego uradimo zadatak primjetimo dvije osobine trouglova:

a) za svaki ΔPQR, u kome je $M\in PR$ proizvoljna tačka, vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$

b) za svaki ΔPQR, kome je data proizvoljna tačka N u unutrašnjosti trougla, i $\{G\}=p(R,N)\cap PQ$, vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{NG}{RG}$.

dokaz:

a)

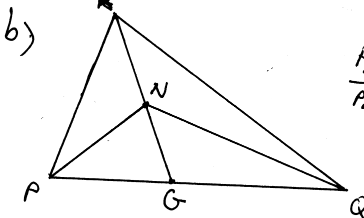


Uvedimo oznake kao na slici.

$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta PQM}=\frac{1}{2}h_m\cdot PQ\\ P_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}h_r\cdot PQ\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{h_m}{h_r}\overset{\text{ToT.}}{=}\frac{PM}{PR}$$

tj. $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$ q.e.d.

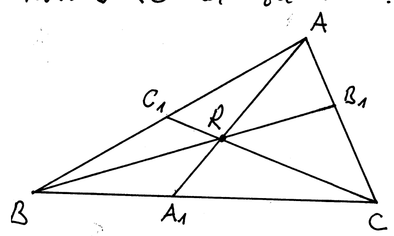
b)



$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_{\Delta PGN}}{P_{\Delta PGR}}=\frac{GN}{RN}\Rightarrow P_{\Delta PGN}=P_{\Delta PGR}\cdot\frac{GN}{RN}\\ \frac{P_{\Delta GQN}}{P_{\Delta GQR}}=\frac{GN}{RN}\Rightarrow P_{\Delta GQN}=P_{\Delta GQR}\cdot\frac{GN}{RN}\end{array}\right\}+\Rightarrow \frac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{GN}{RN}$$

q.e.d.

Vratimo se na zadatak. Dokažimo da vrijedi: $\dfrac{RA_1}{AA_1}+\dfrac{RB_1}{BB_1}+\dfrac{RC_1}{CC_1}=1$.



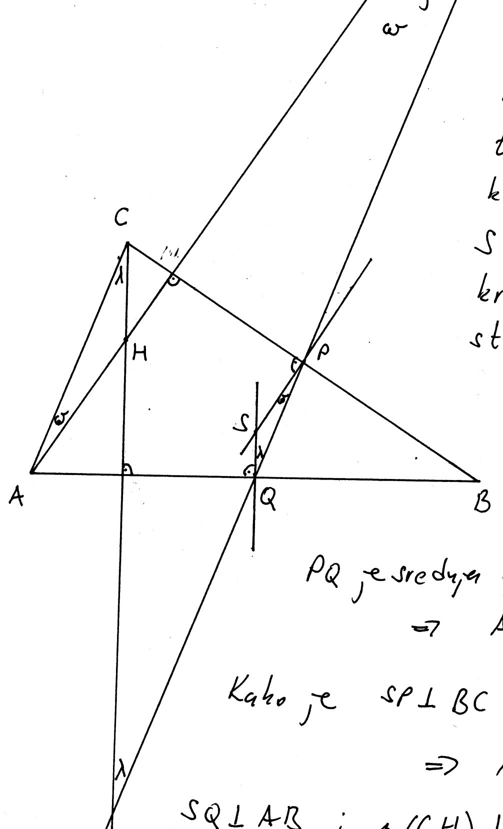
$$\frac{P_{\Delta BCR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RA_1}{AA_1}\ \ldots(1),\quad \frac{P_{\Delta ARC}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RB_1}{BB_1}\ \ldots(2),\quad \frac{P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RC_1}{CC_1}\ \ldots(3)$$

$$(1)+(2)+(3)\ \ \frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=\frac{P_{\Delta BCR}+P_{\Delta ARC}+P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1$$ q.e.d.

Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

Rj.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je H ortocentar, S centar opisane kružnice, P i Q sredine stranica BC i AB redom.

Dokažimo da je $CH = 2 \cdot SQ$.

PQ je srednja linija trougla $\Rightarrow AC \parallel PQ$ i $PQ = \frac{1}{2} AC$.

Kako je $SP \perp BC$ i $p(A,H) \perp BC$ $\Rightarrow AH \parallel SP$.

$SQ \perp AB$ i $p(C,H) \perp AB \Rightarrow CH \parallel SQ$.

Trougao ΔAHC i ΔSQP imaju tri para paralelnih stranica

$\Rightarrow$ imaju podudarne uglove $\left.\begin{array}{l} \measuredangle C = \measuredangle Q \\ \measuredangle A = \measuredangle P \\ \measuredangle H = \measuredangle S \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič UUU}} \Delta AHC \sim \Delta PSQ$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{CH}{SQ}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{SQ} = \frac{2PQ}{PQ} \Rightarrow CH = 2 \cdot SQ$$

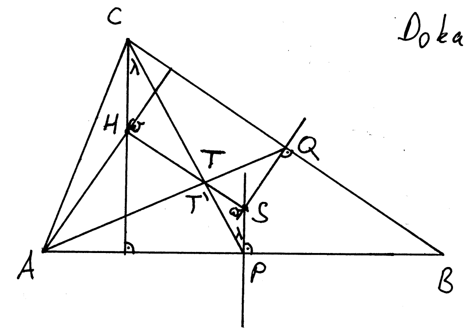
q.e.d.

(Ojlerova prava)

Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru $2:1$.

Napomena: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

Rj. Neka je H ortocentar, a S centar opisane kružnice trougla ΔABC, P i Q sredine stranica AB i BC redom. Označimo sa $\{T'\} = CP \cap HS$.



Dokažimo da je $T' \equiv T$ i $HT : TS = 2 : 1$.

$p(C,H) \perp AB$ i $p(S,P) \perp AB$
$\Rightarrow p(C,H) \parallel p(P,S)$

$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(C,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle HCT' \cong \measuredangle SPT' = \lambda$

$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(H,S)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CHT' \cong \measuredangle PST' = \omega$

Prema prethodnom zadatku je $CH : PS = 2 : 1$

(primjetimo da smo se mogli pozvati i na sličnost UUU. Zašto?)

$\xRightarrow{\text{slič. USU}} \Delta CHT' \sim \Delta PST'$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CH}{PS} = \frac{CT'}{T'P} \Rightarrow \frac{CT'}{T'P} = \frac{2}{1}$$

pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Rightarrow T \equiv T'$

$$\Downarrow$$

ortocentar, težište i centar opisane kružnice Δ su kolinearne tačke q.e.d.

Iz sličnosti slijedi i da je $\frac{HT}{TS} = \frac{CT}{TP} = \frac{2}{1}$

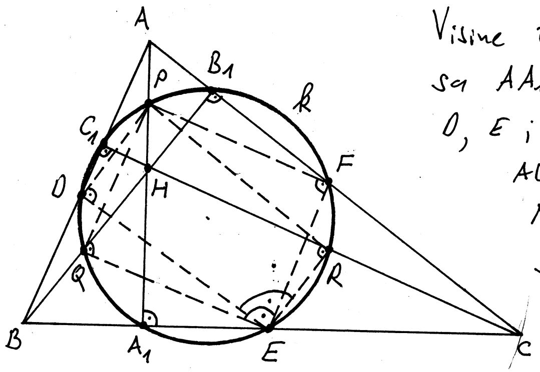
$$\Rightarrow HT : TS = 2 : 1$$

q.e.d.

Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnica devet tačaka

Rj.



Visine trougla ΔABC označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1. Neka su D, E i F redom sredine stranica AB, BC i AC, ΔABC. Neka su P, Q i R redom sredine duži AH, BH i CH gdje je H ortocentar trougla.

Treba dokazati da tačke $A_1, B_1, C_1, D, E, F, P, Q$ i R pripadaju istoj kružnici.

Neka je k kružnica opisana oko ΔPA_1E. Dokažimo da ostale tačke pripadaju ovoj kružnici.

PF srednja linija $\Delta C_1CA \Rightarrow p(P,F) \parallel p(C,C_1)$
EF srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \sphericalangle EFP = 90^\circ \Rightarrow \square PA_1EF$ tetivni $\Rightarrow F \in k$

DP srednja linija $\Delta ABH \Rightarrow p(D,P) \parallel p(B,B_1)$
DE srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E) \parallel p(A,C)$
$\Rightarrow \sphericalangle PDE = 90^\circ \Rightarrow \square DA_1EP$ tetivni $\Rightarrow D \in k$

PR sred. lin. $\Delta AHC \Rightarrow p(P,R) \parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R) \parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \sphericalangle ERP = 90^\circ \Rightarrow \square A_1ERP$ tetivno $\Rightarrow R \in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E) \parallel p(C,C_1)$
PQ sred. lin. $\Delta BHA \Rightarrow p(P,Q) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \sphericalangle PQE = 90^\circ \Rightarrow \square QA_1EP$ tetivni $\Rightarrow Q \in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E) \parallel p(C,C_1)$
EF sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \sphericalangle QEF = 90^\circ \Rightarrow \square B_1QEF$ tetivni $\Rightarrow B_1 \in k$

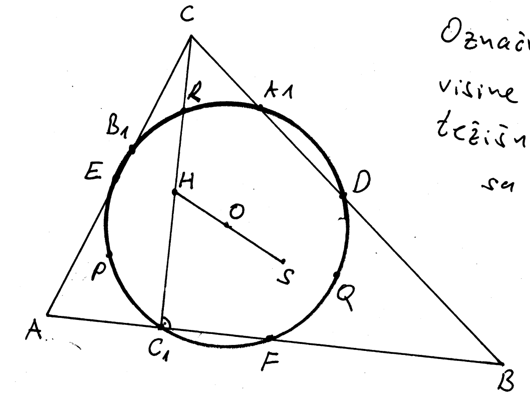
DE sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E) \parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R) \parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \sphericalangle DER = 90^\circ \Rightarrow \square DERC_1$ tetivni $\Rightarrow C_1 \in k$

Prema tome

$A_1, B_1, C_1, P, Q, R, D, E, F \in k$ q.e.d.

Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\frac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

Rj.



Označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla, AD, BE i CF težišnice trougla i sa P, Q i R sredine duži AH, BH i CH.

Posmatrajmo homotetiju sa centrom u H i koeficijentom $\frac{1}{2}$. Pri toj homotetiji vrh A se preslikava u P, vrh B u Q, a vrh C u tačku R. Pri ovoj homotetiji se opisana kružnica slika u kružnicu oko P, Q i R, dakle u kružnicu devet tačaka. Prema tome poluprečnik kružnice 9 tačaka je $\frac{1}{2}R$, a centar joj je na polovini duži SH.

q.e.d.

Konstruktivni zadaci

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:
1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu slike (skice) rješenja, logičkim razmišljanjem (i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata skici, kao što su tačka, prava i slično), dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku. U analizi ne objašnjavamo kako se šta može konstruisati, nego samo kosultira šta se može konstruisati i na osnovu čega.

U konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenje zadatka.

U dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nismo tamo dokazali. Generalno u dokazu treba da se nalazi rečenica šta se treba dokazati, i dati dokaz toga.

U diskusiji (determinizaciji) razmatramo broj rješenja u odnosu na položaj datih elemenata.

Konstrukcija trougla

1. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

3. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

4. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati visine h_a i h_c, i težišna linija t_a.

5. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

6. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica c, duž $a-b$ i ugao $\alpha-\beta$.

7. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

8. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

9. Konstruisati raznostranični trougao $\triangle ABC$ ako su pozati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a+c$.

10. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena. *Konkurentne prave* su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

11. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

12. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, duž $b+c$ i ugao $\beta-\gamma$.

13. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

14. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Konstrukcija četverougla

15. Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

16. Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

17. Konstruisati kvadrat ako dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Konstrukcija tačke

18. U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglovima.

19. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

20. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$, gdje je d data duž.

21. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

Konstrukcija prave

22. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

23. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

24. Date su podudarne kružnice k_1 i k_2, i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

25. Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Napomena. *Ugao između prave i kruga* je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.

26. Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

27. Konstruisati pravu koja siječe dvije date kružnice pod datim uglom.

Razni zadaci

28. Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

29. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date stranice a i b, i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

30. Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

31. Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

32. Date su tačke A i B, i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsjeca na njima podudarne tetive.

33. Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

34. Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B)||l$.

35. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati visina h_c, težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

36. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

37. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

38. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla.

39. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

40. Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram, tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

41. Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

Zadaci za vježbu

42. Date su tačke A, B, C i duž d. Kroz tačku A konstruisati pravu, tako da zbir rastojanja tačaka B i C od te prave bude jednak duži d.

43. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

44. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove simetrale uglova leže na datim pravama.

45. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat, tako da prava određena jednom stranicom toga kvadrata prolazi kroz datu tačku.

46. Konstruisati kvadrat ako je data po jedna tačka na svakoj od njegovih stranica ili na njihovim produžecima.

47. Date su kružnice k_1 i k_2 i duži d_1 i d_2. Konstruisati pravu koja siječe kružnicu k_1 u tačkama A_1 i B_1 i kružnicu k_2 u tačkama A_2 i B_2, tako da je $A_1B_1 = d_1$ i $A_2B_2 = d_2$.

48. Na datoj kružnici konstruisati tačku, tako za koju je razlika rastojanja dvije date prave jednaka datoj duži.

49. Konstruisati trougao ako je dato:
(a) h_a, $2p$, r;
(p je poluobim trougla, r poluprečnik upisane kružnice)
(b) α, r_a, $b+c-a$;
(c) $2p$, r, r_a;
(r_a je poluprečnik spolja upisane kružnice koja dodiruje stranicu a i prave koje sadrže stranice b i c);
(d) a, r, r_a;
(e) r, r_a, $b-c$;
(f) r_b, r_c, $\beta-\gamma$;
(g) a, r_b, r_c;
(h) r_b, r_c, $b+c$;
(i) c, r, r_c;
(j) c, γ, $\alpha-\beta$;
(k) h_c, t_c, $\alpha-\beta$;

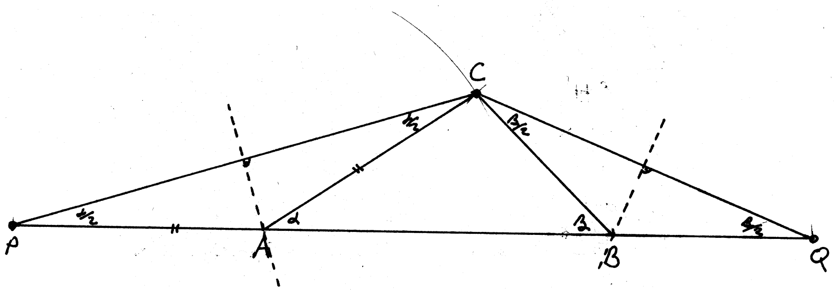
50. Konstruisati trougao ako su dati elementi:
(d) $b-c$, r, $\beta-\gamma$;
(d) a, r, $b-c$;

Zadaci su skinuti sa stranice **pf.unze.ba\nabokov**.
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**.

Konstruisati ΔABC ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC sa uglovima $\measuredangle BAC=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

Na pravoj $p(A,B)$ uzmimo tačke P i Q takve da je $P-A-B-Q$ i da $PA\cong AC$ i $BC\cong BQ$.

Primjetimo da je ΔPAC jkk a kako je $\measuredangle CAB=\alpha$ njegov vanjski ugao imamo $\measuredangle APC=\measuredangle PCA=\frac{\alpha}{2}$.

ΔCBQ je jkk i kako je $\measuredangle ABC=\beta$ njegov vanjski ugao to je $\measuredangle BCQ=\measuredangle BQC=\frac{\beta}{2}$.

Kako nam je poznata stranica PQ (obim trougla ΔABC) i uglovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ to ΔPQC možemo konstruisati.

Tačke A i B leže na simetrali stranica PC i QC.

Prema tome ΔABC možemo konstruisati.

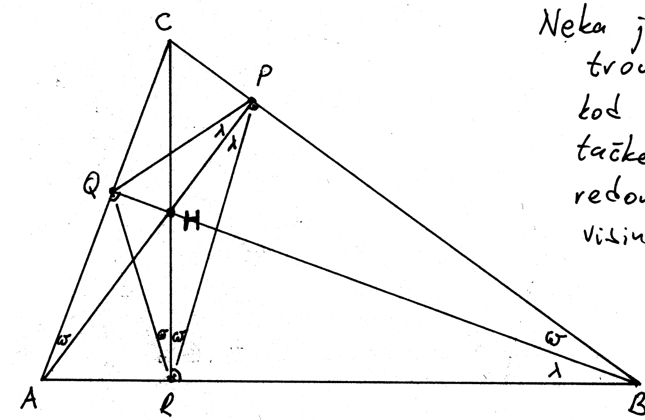
(tačke A i B možemo dobiti i na drugi način. Kako?)

Konstruisati trougao ΔABC ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat trougao ΔABC kod koga su tačke P, Q i R redom podnožja visina iz A, B i C.



Označimo sa H presjek visina trougla.

Primjetimo da je $\square ABPQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QPA=\measuredangle ABQ=\lambda$

$\square HRBP$ tetivni ($\measuredangle HPB+\measuredangle HRB=180^\circ$) $\Rightarrow \measuredangle RBH=\measuredangle HPR=\lambda$

Prema tome $p[P,H)$ je simetrala $\measuredangle QPR$.

Dalje kako je $\measuredangle ARH+\measuredangle AQH=180^\circ$ to je

$\square ARHQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QRH=\measuredangle QAH=\omega$

$\square ABPQ$ tetivni (zašto?) $\Rightarrow \measuredangle QAP=\measuredangle QBP=\omega$

Prema tome $p[R,H)$ je simetrala $\measuredangle QRP$.

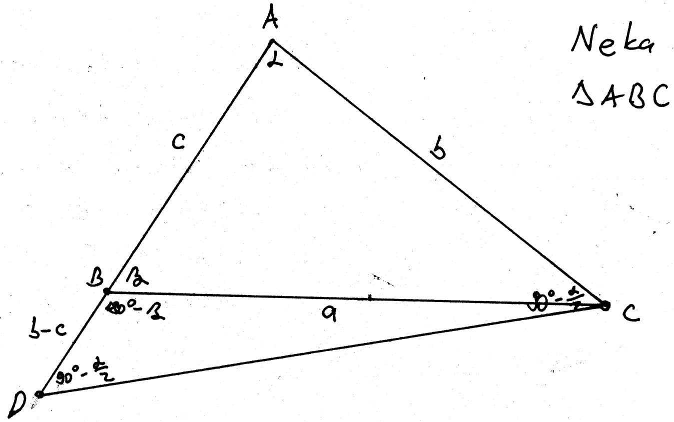
Kako se simetrale uglova u trouglu sijeku u jednoj tački to je i $p[Q,H)$ simetrala $\measuredangle RQP$.

Tačka H je presjek simetrala uglova ΔPQR pa je možemo konstruisati. Kako znamo da je $p(P,H)\perp p(B,C)$ i $\{B\}=p(B,C)\cap p(Q,H)$ i $\{C\}=p(B,C)\cap p(H,R)$ to možemo konstruisati i tačke B i C a time i ΔABC.

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



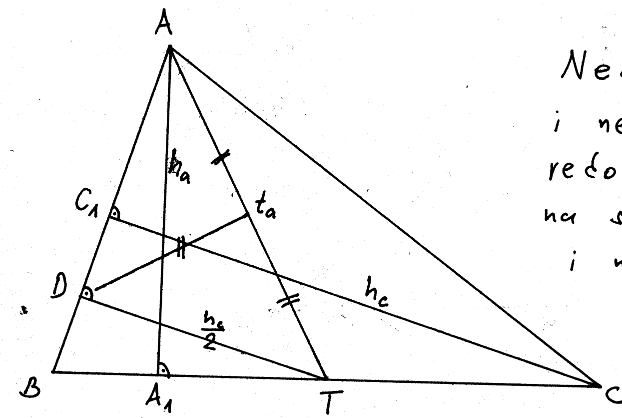
Neka je dat ΔABC.

Produžimo stranicu AB do tačke D tako da je $A-B-D$ i $AD \cong AC$. Primjetimo da je $\measuredangle DBC = 180° - \beta$, i da je $BD = b - c$. U ΔDCB su date dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.
Tačku A možemo dobiti na dva načina (kako?) a time i ΔABC.

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati visine h_a i h_c i težišna linija t_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, i neka su AA_1 i CC_1 redom visine spuštene na stranicu BC i AB, i neka je T sredina stranice BC.

Označimo sa D sredinu duži BC_1. Primjetimo da je TD srednja linija ΔBCC_1 pa je $TD \perp AB$ i $TD = \frac{h_c}{2}$.

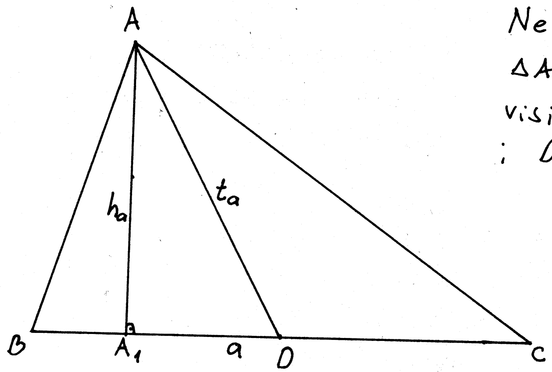
U ΔAA_1T znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.
U ΔDTA isto tako znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



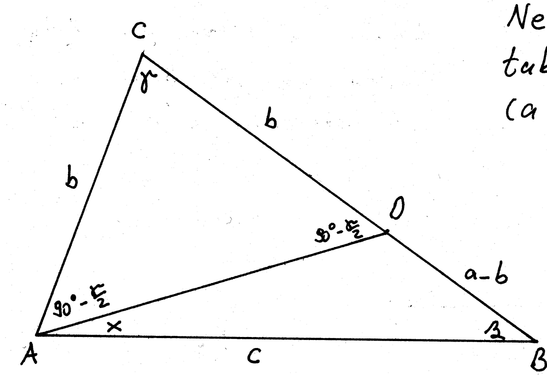
Neka je dat trougao $\triangle ABC$ u kome su AA_1 visina na stranicu a i D sredina stranice BC.

U trouglu $\triangle AA_1D$ su nam poznate dvije stranice i ugao (od $90°$ stepeni) pa ga možemo konstruisati. Znamo da je D sredina stranice BC, pa kako imamo konstruisanu $p(BC)$ to možemo konstruisati tačke B i C a time i $\triangle ABC$.

Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica c, duž $a-b$ i ugao $\alpha-\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat $\triangle ABC$ takav da je $a > b$ (a time i $\alpha > \beta$).

Na stranici a uzmimo tačku D takvu da je $CD = b$.
Tada je $\triangle ADC$ jkk i $BD = a-b$.

$\triangle ADC$ jkk $\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 90° - \frac{\gamma}{2}$

Označimo sa $x = \measuredangle DAB$.

Imamo:

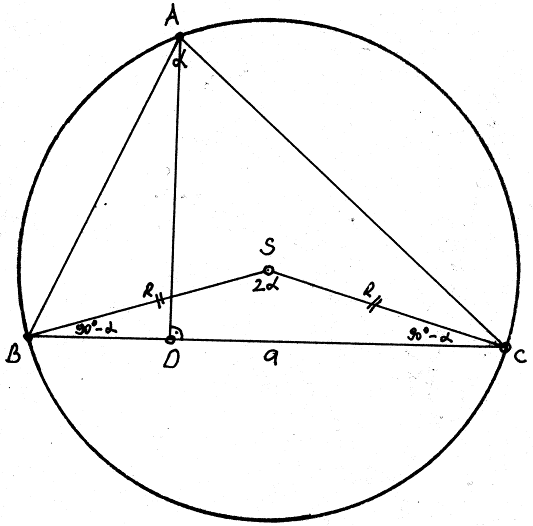
$$90° - \frac{\gamma}{2} = x + \beta$$
$$-\quad 90° - \frac{\gamma}{2} + x = \alpha$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$-x = x + \beta - \alpha$$
$$2x = \alpha - \beta$$
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

U $\triangle ABD$ su nam poznate dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.
Tačku C možemo dobiti na dva načina (kao presjek simetrale stranice AD i $p(B,D)$ ili pomoću uglova $\measuredangle ADC = \measuredangle DAC$). Prema tome $\triangle ABC$ možemo konstruisati.

\# Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao $\triangle ABC$ u kome je $AD=h_a$ visina na stranica a. $\sphericalangle BAC=\alpha$.

Označimo sa S centar opisane kružnice trougla $\triangle ABC$.

Kako je $\sphericalangle BAC$ oštri periferiski ugao nad tetivom BC to je $\sphericalangle BSC=2\alpha$.

$\triangle SBC$ jkk $\Rightarrow$ $\sphericalangle CBS=\sphericalangle BCS=90°-\alpha$.

U trouglu $\triangle BCS$ znamo jednu stranicu i veličine sva tri ugla pa ga možemo konstruisati.

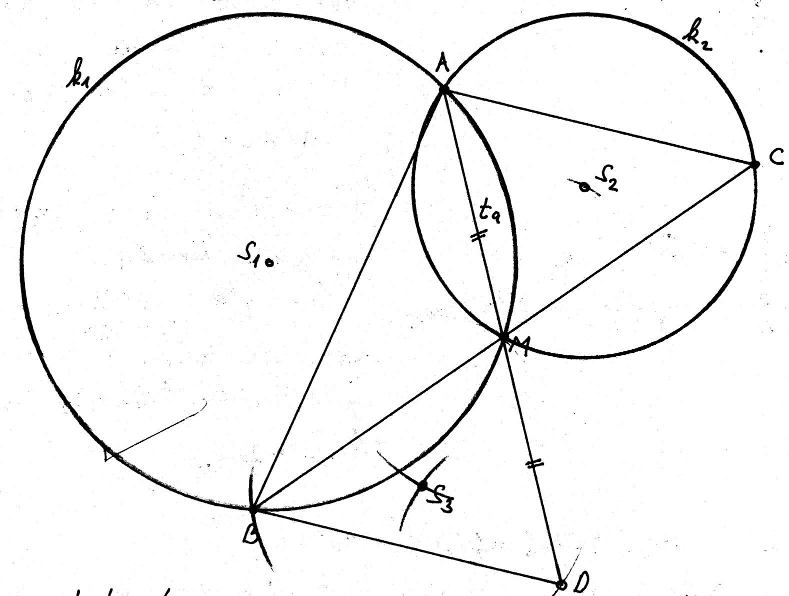
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek $k(S,SB)$ i prave koja je paralelna sa $p(B,C)$ i udaljena od nje za dužinu h_a.

Trougao $\triangle ABC$ možemo konstruisati.

\# Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM=t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao $\triangle ABC$, tačka M sredina stranice BC i tačke S_1 i S_2 centri opisanih kružnica oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

Kako je data duž $AM=t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2, a znamo da je $S_1A=S_1M=R_1$ i $S_2A=S_2M=R_2$ to kružnice $k_1(S_1,R_1)$ i $k_2(S_2,R_2)$ možemo konstruisati.

Ako na pravoj $p(A,M)$ uzmemo tačku D takvu da je $A-M-D$ i $AM\cong MD$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} BM\cong MC \\ \sphericalangle BMD\cong\sphericalangle CMA \text{ (unakrsni)} \\ MD\cong AM \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle BMD\cong\triangle CMD$$

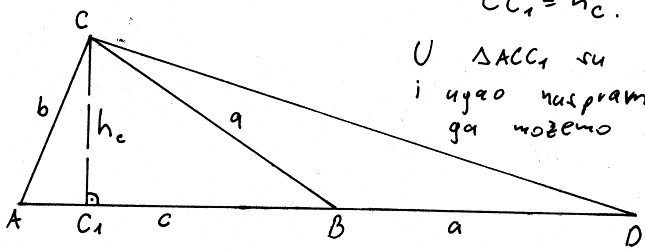
$\Downarrow$ ova dva trougla imaju podudarne poluprečnike opisane kružnice

Prema tome centar S_3 opisane kružnice trougla $\triangle BMD$ mogu konstruisati, time i tačku B pa i $\triangle ABC$.

(#) Konstruisati raznostraničan trougao ΔABC ako su poznati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a+c$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC traženi trougao koji ima datu stranicu b, visinu h_c i duž $a+c$. Označimo sa $CC_1 = h_c$.

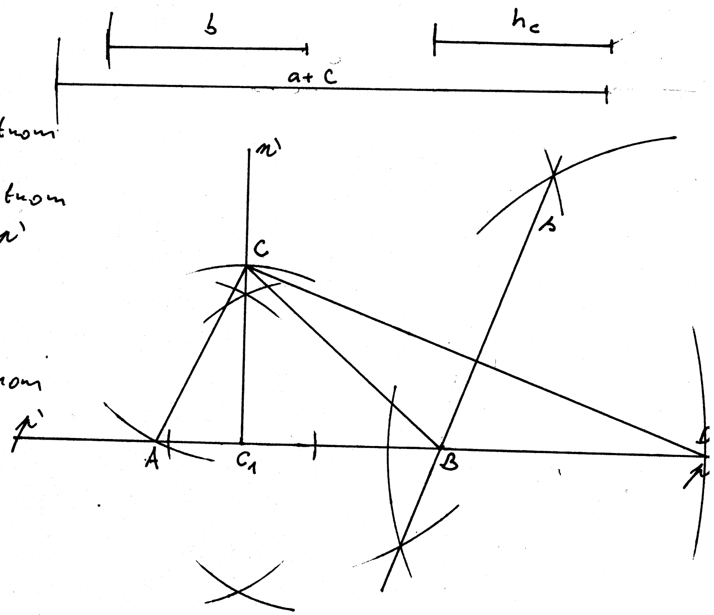


U ΔACC_1 su poznate dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.

Neka je D takva tačka da je A-B-D i $AD = a+c$.

Primjetimo da je ΔBDC jkk (pa tačka B leži na simetrali stranice CD). Sad nije teško konstruisati trougao ΔABC.

Konstrukcija



1. b, h_c, $a+c$
2. poluprava p' sa početnom tačkom C_1
3. poluprava n' sa početnom tačkom C_1 takva $n' \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n' = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. poluprava p'' sa početnom tačkom C_1 koja nadopunjuje polupravu p' do prave p
7. $k(A, a+c) \cap p'' = \{D\}$
8. s simetrala CD
9. $s \cap p = \{B\}$

Dokaz

Da konstruisani trougao ima stranicu b jednaku datoj duži b, visinu h_c jednaku datoj duži h_c i zbir stranica $a+c$ jednak datoj

duži $a+c$ slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Ako je $b < h_c$ ili $b \geq a+c$ zadatak nema rješenje.

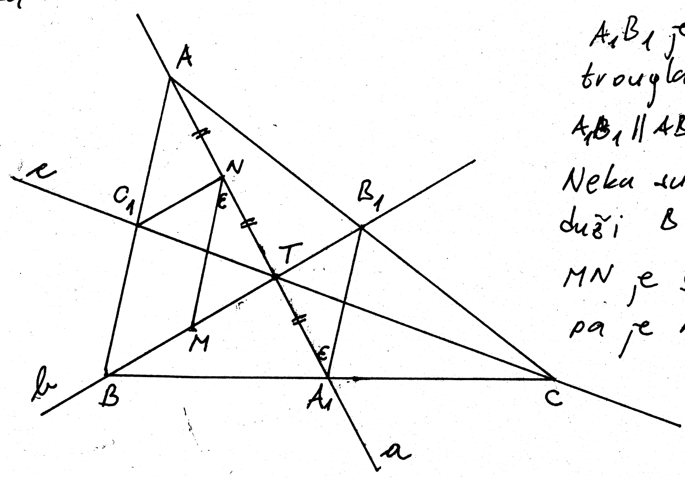
Ako je $b \geq h_c$ i $b < a+c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su a, b i c tri konkurentne prave koje prolaze kroz tačku T, neka su date tačke $A, A_1 \in a$, $B, B_1 \in b$ i $C, C_1 \in c$ takve da ΔABC ima težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1.



A_1B_1 je srednja linija trougla ΔABC pa je $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ ...(*)

Neka su M i N redom središta duži BT i AT.

MN je srednja linija ΔBTA pa je $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2}AB$ ...(**)

Iz (*) i (**) $MN \parallel A_1B_1$ i $MN \cong A_1B_1$.

$MN \parallel A_1B_1$ i $p(A, A_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TA_1B_1 \cong \measuredangle TNM = \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle MTN \cong \measuredangle A_1TB_1 \text{ (unakrsni)}\\ \measuredangle TNM \cong \measuredangle TA_1B_1 = \varepsilon \\ MN \cong A_1B_1\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta MTN \cong \Delta TA_1B_1 \Downarrow TN \cong TA_1$$

Primjetimo da je C_1N srednja linija $\Delta ABT \Rightarrow C_1N \parallel b$.

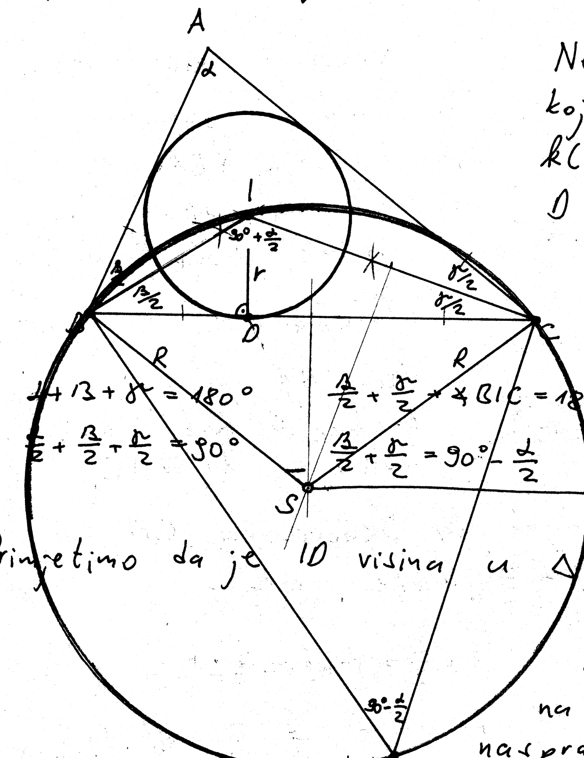
Tačke A i T su date pa možemo konstruisati središte N duži AT a time i tačku A_1. Kako su date prave a, b, c i znamo da je $C_1N \parallel b$ to možemo konstruisati i tačku C_1.

Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC u koji je upisana kružnica $k(I, r)$, i neka je tačka D ortogonalna projekcija tačke I na stranicu BC.

$$\measuredangle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Primjetimo da je ID visina u ΔBCI na stranicu BC. Zadatak u kome je data stranica, visina na tu stranicu i ugao naspram te stranice smo već imali ranije.

Označimo sa S centar opisane kružnice ΔBCI.

U našem slučaju primjetimo da je $\measuredangle BSC = 180° - \alpha$, pa su $\measuredangle SBC \cong \measuredangle BCS = \frac{\alpha}{2}$.

U ΔBSC znamo USU pa ga možemo konstruisati.

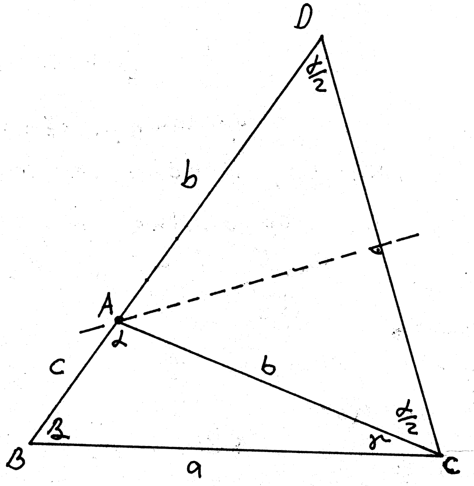
Tačka I se nalazi na udaljenosti r od BC pa kako znamo konstruisati $k(S, SB)$ to možemo konstruisati tačku I.

Sad nije teško dobiti tačku A a time i ΔABC.

\# Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, duž $b+c$ i ugao $\beta-\gamma$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat. ΔABC. Uvedimo oznake $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle BCA=\gamma$, $AB=c$, $BC=c$, $AC=b$.

Duž BA produžimo do tačke D tako da je $B-A-D$ i $AD\cong AC$.

Primjetimo da je ΔDAC jkk sa osnovicom CD i da je $\sphericalangle ADC\cong\sphericalangle ACD=\frac{\alpha}{2}$. Dalje imamo:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ \qquad \gamma+\frac{\alpha}{2}=\gamma+90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=$$

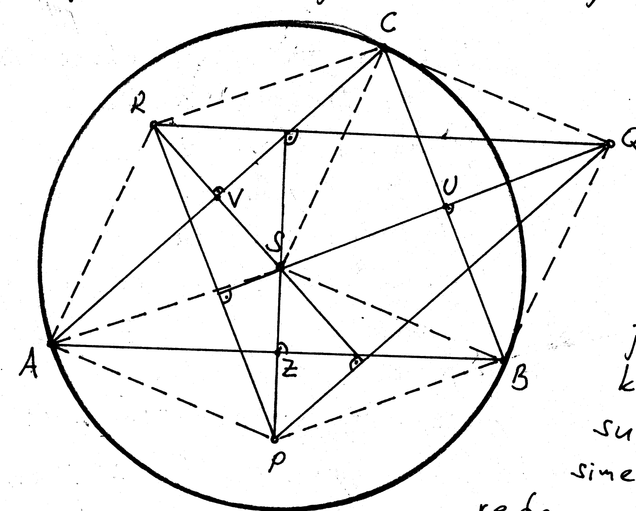
$$\frac{\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2} \qquad =90^\circ-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

U ΔBCD znamo dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati. Tačka A pripada simetrali stranice DC pa ΔABC možemo konstruisati.

\# Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC dati trougao čiji je centar opisane kružnice S i neka su P, Q i R tačke simetrične tački S redom u odnosu na stranice trougla AB, BC i AC.

Tačka S pripada simetrali stranica AB, BC i AC. Označimo sa U, V i Z ortogonalne projekcije tačke S na stranice BC, AC i AB. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} SU\cong QU \\ \sphericalangle SUB\cong\sphericalangle QUB \\ BU\cong BU \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta SUB\cong\Delta QUB \Downarrow SB\cong QB.$$

Slično bi pokazali sljedeće (isprekidane duži na slici):

$BQ\cong CQ\cong SC\cong RC\cong AR\cong AS\cong AP\cong BP\cong BS$ (za vježbu).

$BQ\parallel CS\parallel AR$ i $AR\cong BQ \Rightarrow \square ABQR$ paralelogram,

pa kako je $p(P,S)\perp p(A,B)$ to je i $p(P,S)\perp p(R,Q)$.

Slično bi pokazali da je $p(R,S)\perp p(P,Q)$ i $p(Q,S)\perp p(P,R)$ (za vježbu)

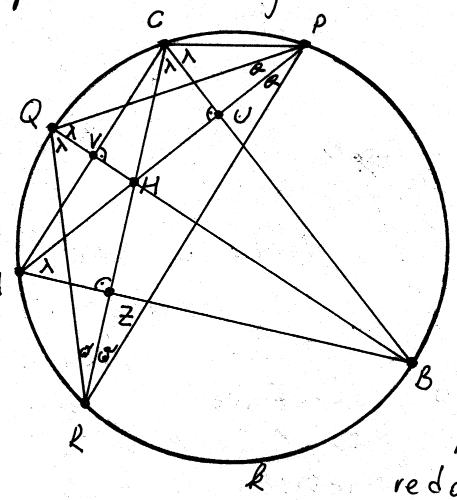
Tačka S je presjek visina ΔPQR pa je možemo konstruisati.

Sad možemo konstruisati i ΔABC (presjek simetrala duži PS, QS i RS).

Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka H ortocentar datog trougla ΔABC. Neka su P, Q i R tačke koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru. Označimo sa U, V i Z tačke koje su ortogonalne projekcije ortocentra H redom na stranice BC, AC i AB.

Označimo sa k kružnicu opisanu oko ΔABC.
Dokažimo da tačke P, Q i R leže na kružnici k.
Posmatrajmo $\square ABPC$. Imamo

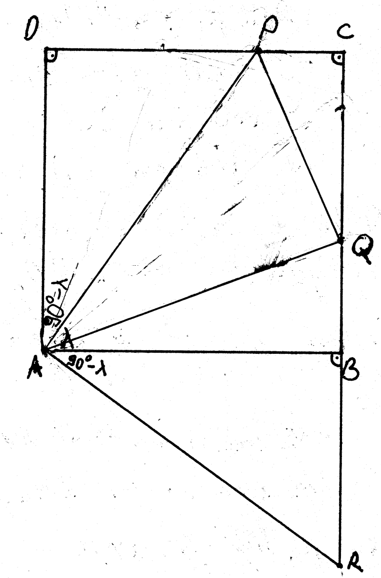
$$\left.\begin{array}{l} HU \cong PU \\ \sphericalangle HUC \cong \sphericalangle PUC = 90^\circ \\ CU \cong CU \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta HUC \cong \Delta PUC$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle HCU \cong \sphericalangle PCU = \lambda$$

U trouglu ΔAZH imamo $\sphericalangle AZH = 90^\circ$, $\sphericalangle AHZ = \sphericalangle CHU \Rightarrow \sphericalangle ZAH = \lambda$.
Uglovi $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle BCP$ su podudarni i pledaju na istu stranicu $BP \Rightarrow \square ABPC$ tetivni.
Slično dokazujemo za tačke R i Q (za vježbu).
$\square QRBC$ tetivni $\Rightarrow \sphericalangle RQB = \sphericalangle RCB = \lambda$
$\square QABP$ tetivni $\Rightarrow \sphericalangle PAB = \sphericalangle BQP = \lambda$
Slično bi pokazali da je $\sphericalangle QRC = \sphericalangle PRC = \omega$ i $\sphericalangle QPA = \sphericalangle RPA = \alpha$,
(za vježbu).
Kako kružnicu k možemo konstruisati, sad možemo konstruisati i ΔABC.

Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ kod koga je $P \in CD$ i $Q \in BC$.
Označimo sa $\lambda = \sphericalangle PAB$.
Tada je $\sphericalangle PAD = 90^\circ - \lambda$
Neka je $R \in p(C,B)$: $C-B-R$ i $\sphericalangle BAR = 90^\circ - \lambda$.

Tad
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DAP = \sphericalangle BAR = 90^\circ - \lambda \\ AD = AB \\ \sphericalangle ADP = \sphericalangle ABR = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ADP \cong \Delta ABR$$
$$\Downarrow$$
$$AP \cong AR$$

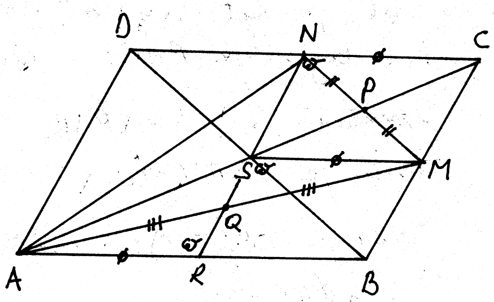
Primjetimo da je i $\sphericalangle PAR = 90^\circ$.

Kako su date tačke A, P i Q sad nije problem konstruisati tačku R a poslije nje tačk B i C.
Prema tome kvadrat $\square ABCD$ možemo konstruisati.

Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \Delta BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \Delta DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ASR \cong \measuredangle NSC \\ \measuredangle ARS \cong \measuredangle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta ARS \cong \Delta CNS \Downarrow AR \cong CN \quad (*)$$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle AQR \cong \measuredangle SQM \\ \measuredangle QRA \cong \measuredangle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta ARQ \cong \Delta MSQ \Downarrow AQ \cong QM \quad (**)$$

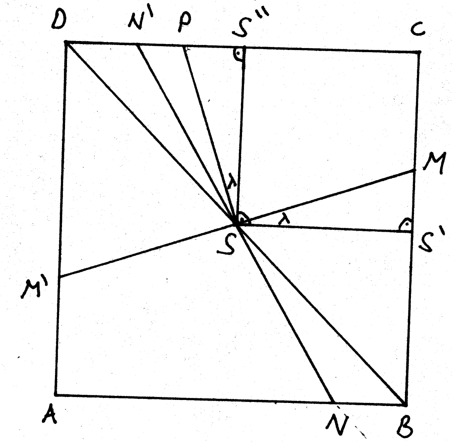
Na osnovu $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ S težište ΔAMN.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

$$\left.\begin{array}{l} SS' \text{ srednja linija } \Delta DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB \\ SS'' \text{ srednja linija } \Delta ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB \end{array}\right\} \Rightarrow SS' \cong SS''$$

Nije teško pokazati (iz podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \measuredangle PSS''$.

$\measuredangle PSS' = 90° + \lambda$, $\measuredangle PSS' = \measuredangle PSM + \measuredangle MSS' = 90° + \measuredangle MSS'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle MSS' = \lambda$

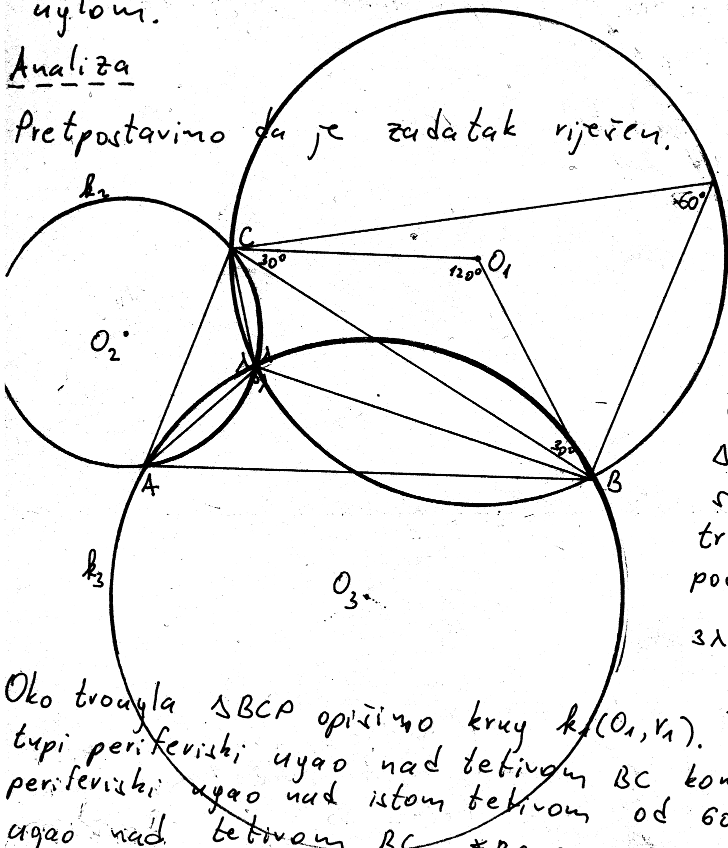
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSS' \cong \measuredangle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \measuredangle SS'M \cong \measuredangle SS''P = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SS'M \cong \Delta SS''P \Downarrow SM \cong PS$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

#) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri strane trougla vide pod podudarnim uglom.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka P u unutrašnjosti ΔABC iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglom λ.

$3\lambda = 360° \Rightarrow \lambda = 120°$

Oko trougla ΔBCP opišimo krug $k_1(O_1, r_1)$. Tada je $\measuredangle BPC = 120°$ tupi periferijski ugao nad tetivom BC kome odgovara oštri periferijski ugao nad istom tetivom od 60° pa je centralni ugao nad tetivom BC, $\measuredangle BO_1C = 120°$.

ΔBO_1C jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1CB = \measuredangle CBO_1 = 30°$.

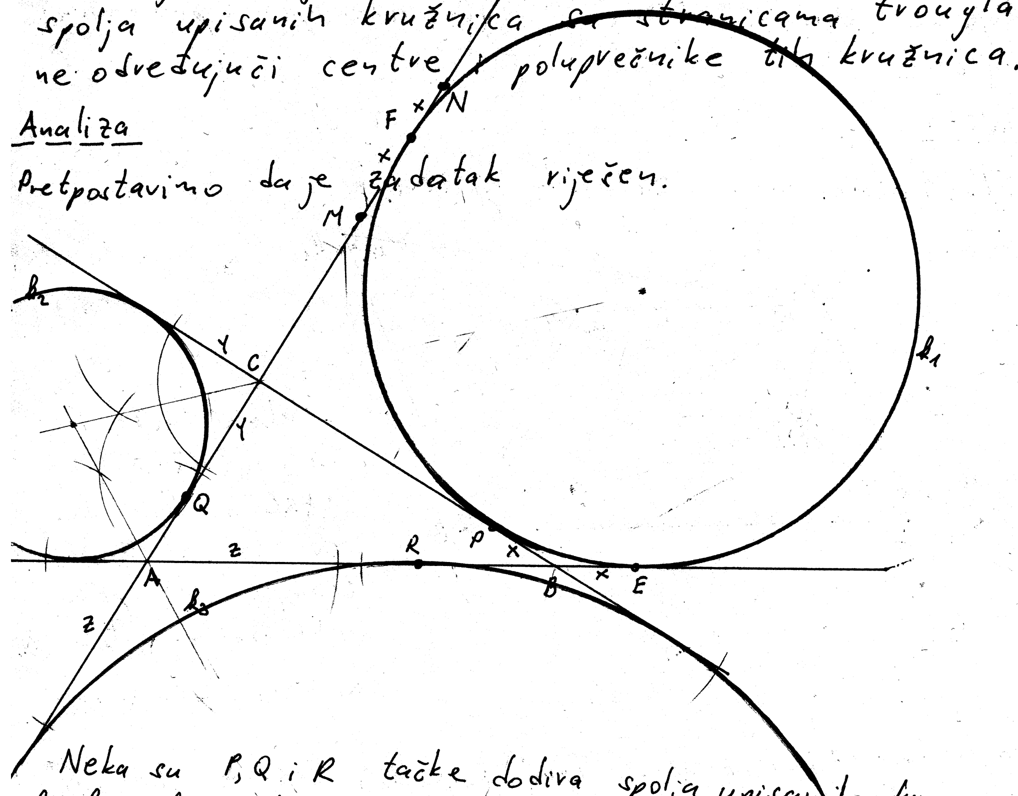
Ako bi oko trougla ΔAPC opisali krug $k_2(O_2, r_2)$ ili oko ΔABP opisali krug $k_3(O_3, r_3)$ na sličan način bi došli do rezultata $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle O_2AC = \measuredangle BAO_3 = \measuredangle ABO_3 = 30°$.

Kako možemo konstruisati kružnice k_1, k_2 i k_3 time možemo konstruisati i tačku P.

#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su P, Q i R tačke dodira spolja upisanih kružnica k_1, k_2 i k_3 redom sa stranicama BC, AC i AB trougla ΔABC. Analizirat ćemo konstrukciju tačke P.

Na kružnici k_1 imamo tri para tangentnih duži tj.

$BE \cong BP$, $CP \cong CF$, $AF \cong AE$ (E i F su tačke dodira k_1 i $p(A,B)$ i $p(A,C)$)

Neka je $M \in p(A,C)$: $AM \cong AB \Rightarrow MF = BE = x$.

Neka je $N \in p(A,C)$: $CN \cong CB \Rightarrow NF = PB = BE = x$.

Sad imam $MN = AN - AM = b + a - c$

pa je $x = \frac{MN}{2} = \frac{b+a-c}{2}$.

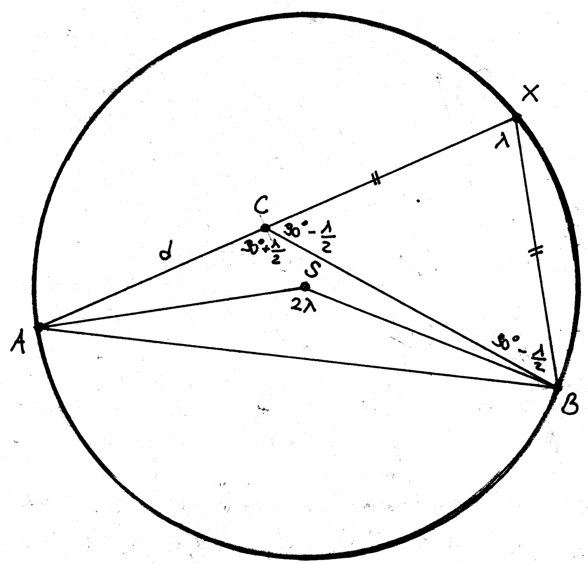
Slično bi pokazali da je $y = \frac{c+b-a}{2}$ i $z = \frac{a+c-b}{2}$.

Kako znamo duži x, y i z sad nije teško konstruisati tačke P, Q i R.

(#) Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica k s centrom u S takva da prolazi kroz tačke A, B i X i da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

Uzmimo tačku C na duži AX tako da je $AC = d$. Tada je $CX = BX$.

$$\measuredangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle AXB = \lambda \overset{\Delta CBX \text{ jkk}}{\Longrightarrow} \measuredangle XCB = \measuredangle CBX = 90^\circ - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \measuredangle ACB = 90^\circ + \frac{\lambda}{2}$$

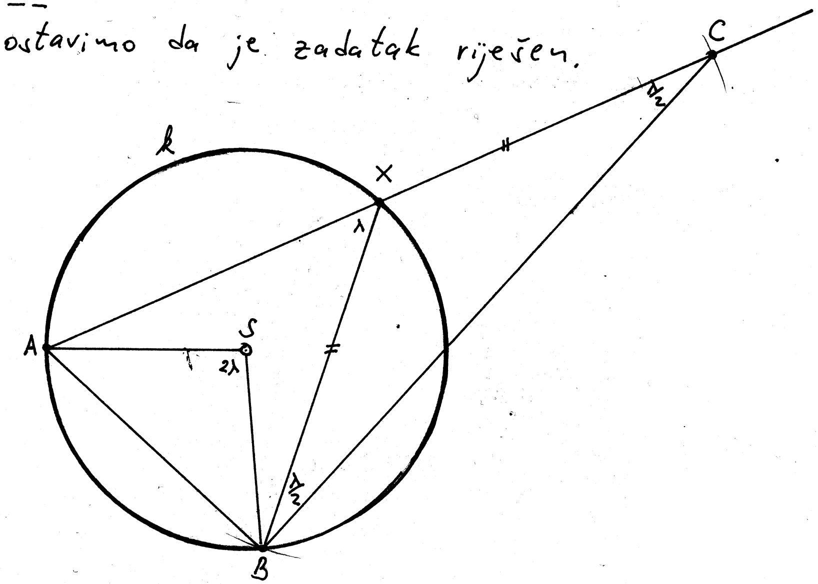
U trouglu ΔABC su poznate dvije stranice i tup ugao pa ga možemo konstruisati.

Prema tome tačka X kružnice k možemo konstruisati.

(#) Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica s centrom u S opisana oko tački A, B i X tako da je $AX + BX = d$, gdje je d neka data duž.

Duž AX produžimo do tačke C tako da je $A - X - C$ i $BX \cong CX$.

$$\measuredangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle AXB = \lambda \overset{\Delta BCX \text{ jkk}}{\Longrightarrow} \measuredangle XBC = \measuredangle XCB = \frac{\lambda}{2}$$

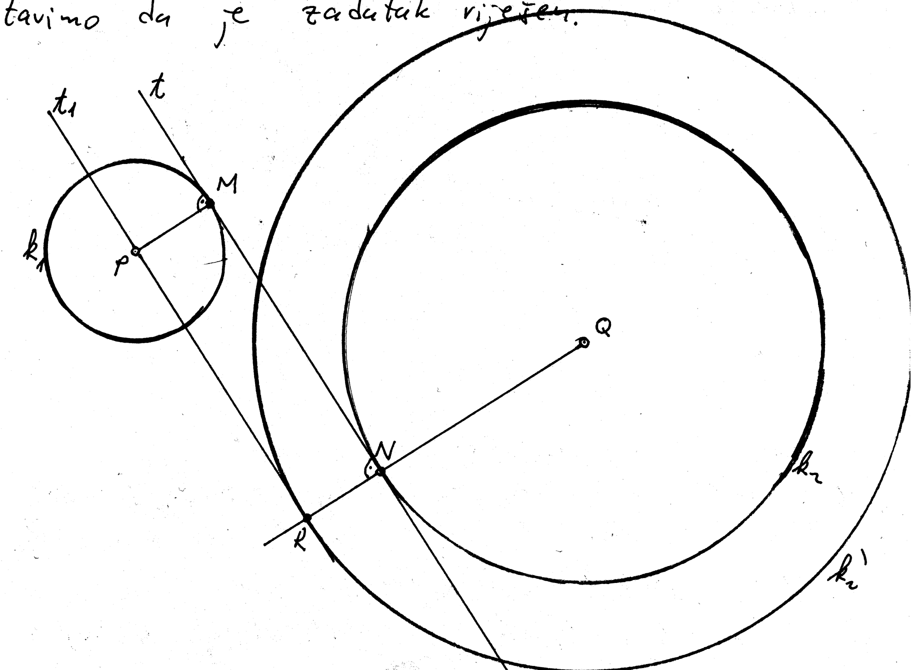
Kako ugao $\frac{\lambda}{2}$ mogu konstruisati to u ΔABC su poznate dvije stranice (AC i AB) i ugao ($\measuredangle ACB$) pa ga možemo konstruisati.

Tačku X kružnice k možemo konstruisati.

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P,r_1)$ i $k_2(Q,r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t$ $\Rightarrow$ $p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q,QR)$.

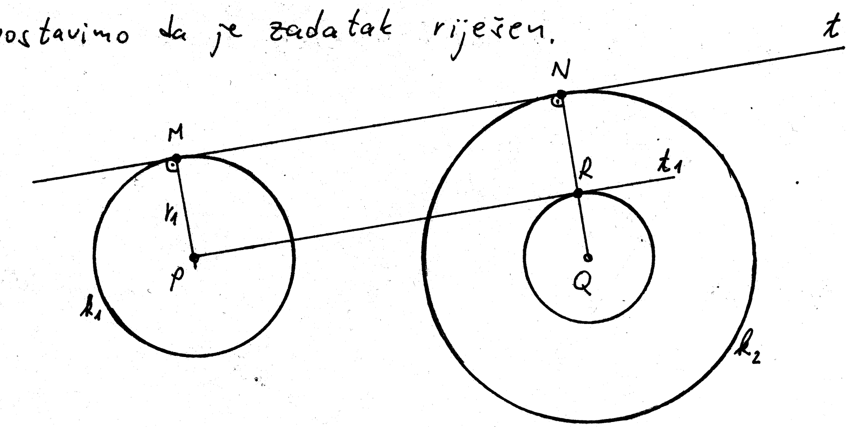
Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P,r_1)$ i $k_2(Q,r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t$ $\Rightarrow$ $p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ ($NQ > PM$).

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

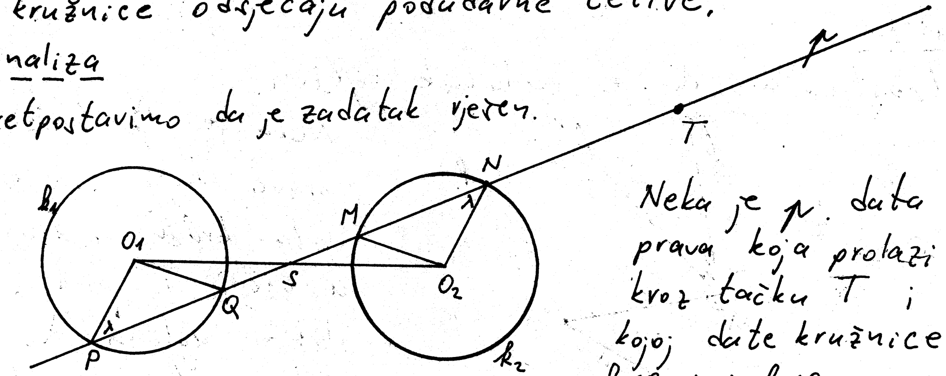
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsijecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsijecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\triangle PQO_1 \cong \triangle MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1PQ \cong \measuredangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle O_1SP \cong \measuredangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle SPO_1 \cong \measuredangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle PSO_1 \cong \triangle NSO_2 \Rightarrow O_1S \cong O_2S.$$

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

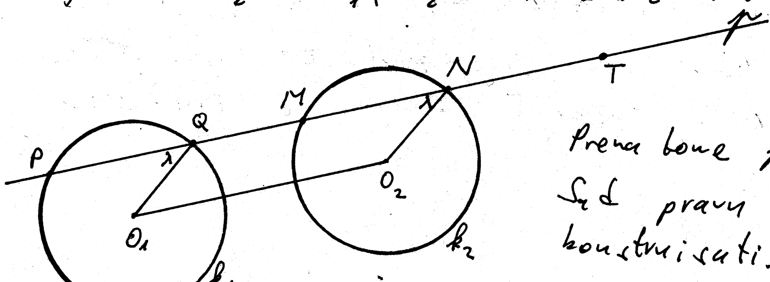
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow \triangle PQO_1 \cong \triangle MNO_2$

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1QP \cong \measuredangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N \Rightarrow \square O_1O_2NQ$ je paralelogram.

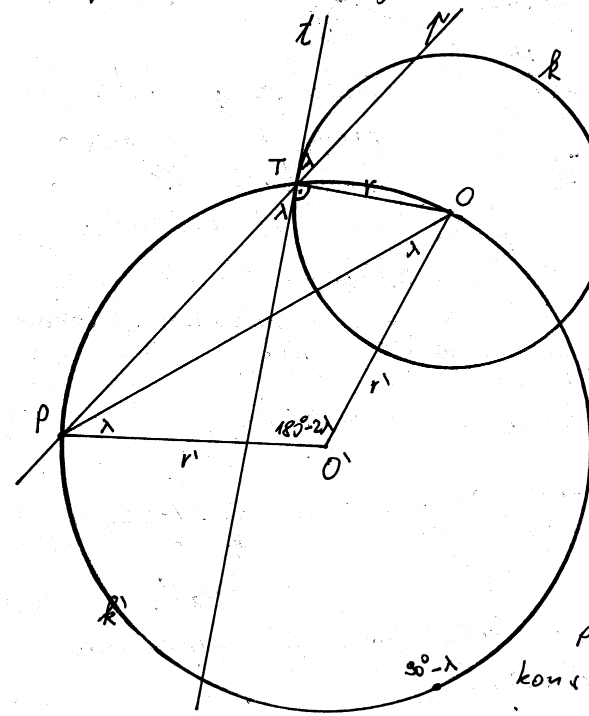


Prema tome $p \parallel O_1O_2$. Sad pravu p možemo konstruisati.

Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe datu kružnicu $k(O,r)$ u tački T, pod datim uglom λ. Neka je t tangenta na krug k u tački T.

I način

Primijetimo da je ugao $\measuredangle OTP = 90° + \lambda$. Kako su poluprečnik r i duž PO poznati to nije teško konstruisati $\measuredangle OPT$ a time i pravu p.

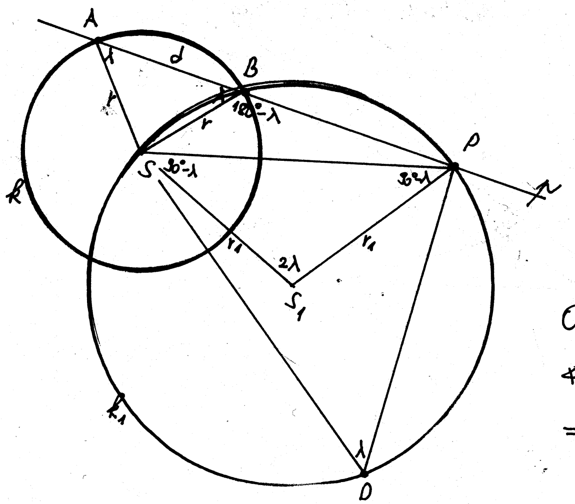
II način

Primijetimo da je $\measuredangle OTP = 90° + \lambda$. Neka je $k'(O', r')$ kružnica opisana oko trougla $\triangle POT$. Tada je $\measuredangle PO'O = 180° - 2\lambda$ (Zašto?) pa je i $\measuredangle OPO' = \measuredangle O'OP = \lambda$ (Zašto?). Kako su duž PO i ugao λ poznati to nije teško konstruisati $\triangle PO'O$, tačku T pa time i traženu pravu p.

Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \sphericalangle PBS = 180° - \lambda$

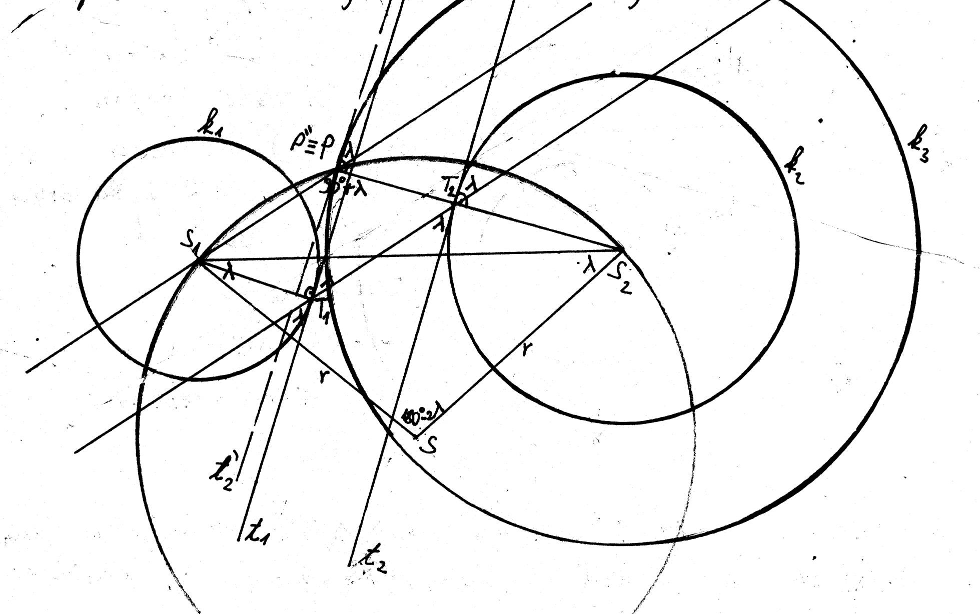
Ako je $k_1(S_1,r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\sphericalangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle PSS_1 \cong \sphericalangle S_1PS = 90° - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

Konstruisati pravu koja siječe dvije kružnice pod datim uglom. (Ugao između prave i kruga je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.)

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe kružnice $k_1(S_1,r_1)$ i $k(S_2,r_2)$ redom u tačkama T_1 i T_2 pod datim uglom λ.

Kroz tačku S_1 paralelno pravoj p povucimo pravu p'.

Označimo sa k_3 kružnica $k(S_2, r_1+r_2)$.

Neka je $\{P, P'\} = p' \cap k_3 \; : \; S_1 - P - P'$.

Neka $p(S_2,T_2) \cap k_3 = \{P''\}$. Dokažimo da je $P'' \equiv P$.

$P''T_2 \perp t_2$, $P''T_2 = r_1$, $S_1T_1 \perp t_1$, $S_1T_1 = r_1 \Rightarrow \square S_1T_1T_2P''$ paralelogram

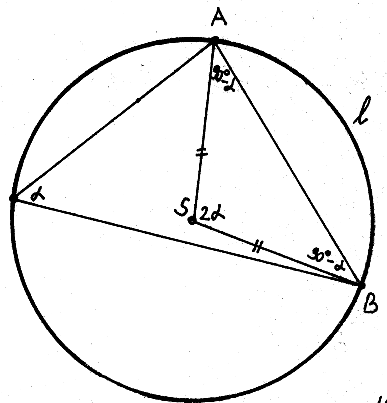
$\Rightarrow P'' \in p' \Rightarrow P'' \equiv P$. $\quad \sphericalangle S_2PS_1 \cong \sphericalangle S_2T_2T_1 = 90° + \lambda$

Kako su nam poznati centri S_1 i S_2, kružnice k_1 i k_3 (i k_2) sad nije teško konstruisati tačku P a poslije toga i traženu pravu p.

(#) Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



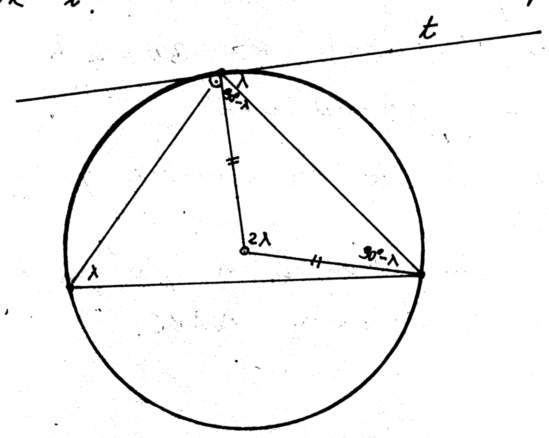
Neka su date tačke A i B, kružnica $k(S,SA)$ koja sadrži tačke A i B takva da su periferiski uglovi nad l (l je kružni luk čije su krajne tačke A i B) jednaki datom uglu α.

Primjetimo da je $\measuredangle BSA = 2\alpha$.

Kako je ΔASB jkk sa osnovicom AB imamo da je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 90° - \alpha$.

Prema tome ΔASB možemo konstruisati pa time i kružni luk l.

Primjedba:



Primjetite da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

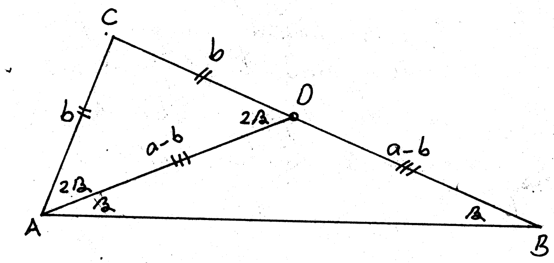
Prema tome luk kruga možemo konstruisati i na drugi način.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date stranice a i b i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat ΔABC kod koga je $\alpha = 3\beta$.
($\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$).



Kako je $\alpha > \beta$ možemo uzeti tačku D na stranici BC tako da $\measuredangle BAD = \beta$.

ΔABD jkk

Kako je $\measuredangle ADC$ vanjski ugao ΔABD to je $\measuredangle ACD = 2\beta$.

ΔADC jkk $\Rightarrow AC = DC = b \Rightarrow BD = a-b$

ΔABD jkk $\Rightarrow AD = BD = a-b$

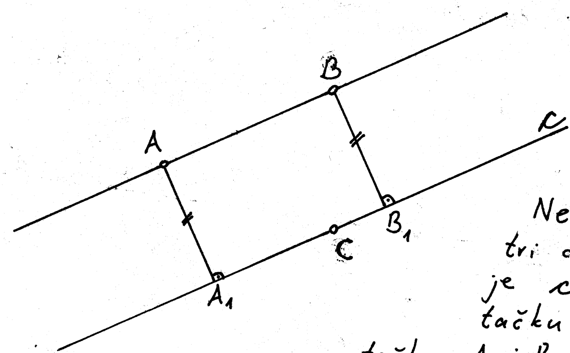
U ΔADC su nam poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.

Kako nam je poznata stranica a poslije konstrukcije ΔADC nije teško konstruisati ΔABC.

Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



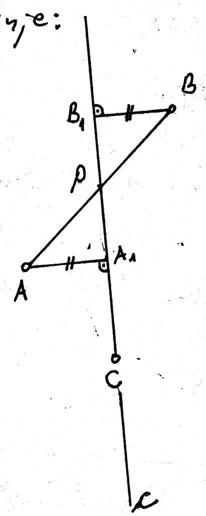
Neka su A, B i C tri date tačke i neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke A i B podjednako udaljene od nje.

Neka su A_1 i B_1 tačke koje pripadaju c, koje su ortogonalne projekcije tački A i B. Imamo

$AA_1 \parallel BB_1$ i $AA_1 \cong BB_1 \Rightarrow \square AA_1B_1B$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,B) \parallel c$ pa pravu c možemo konstruisati.

II rješenje:



Neka su A, B i C tri date tačke.
Neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke B i C podjednako udaljene od prave c.
Označimo sa A_1 i B_1 ortogonalne projekcije tački A i B.
Neka je $\{P\} = AB \cap c$.

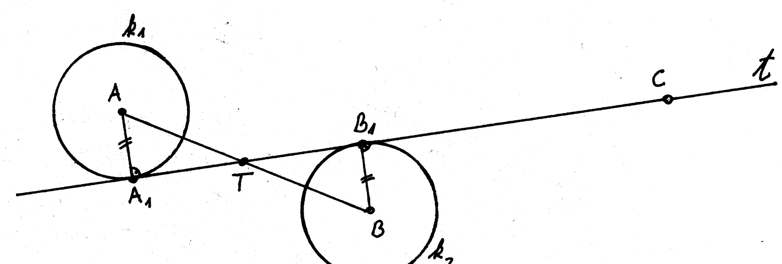
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle APA_1 \cong \sphericalangle BPB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle AA_1P \cong \sphericalangle BB_1P = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Downarrow AP \cong BP$$

Prava c prolazi kroz sredinu duži AB pa je možemo konstruisati.

Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

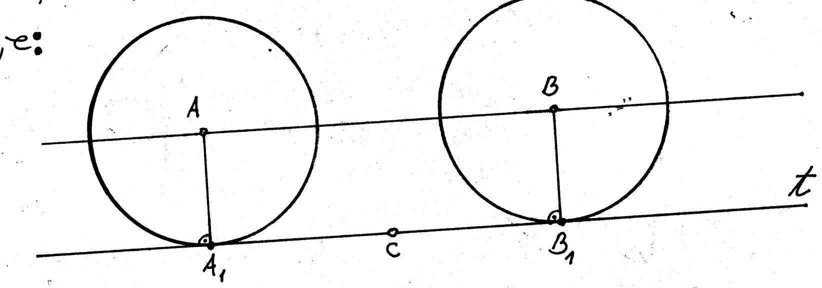


Neka su date tri nekolinearne tačke A, B i C i dvije podudarne kružnice (kružnice koje imaju podudaran poluprečnik) k_1 i k_2 koje imaju zajedničku tangentu t u tačkama A_1 i B_1 i $C \in t$. Neka je $\{T\} = AB \cap t$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ATA_1 \cong \sphericalangle BTB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle AA_1T \cong \sphericalangle BB_1T = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AA_1T \cong \Delta BB_1T \Downarrow AT \cong BT$$

Kako $T \in t$ pravu t možemo konstruisati.
Kako su $AA_1 \perp t$ i $BB_1 \perp t$ kružnice k_1 i k_2 možemo konstruisati.

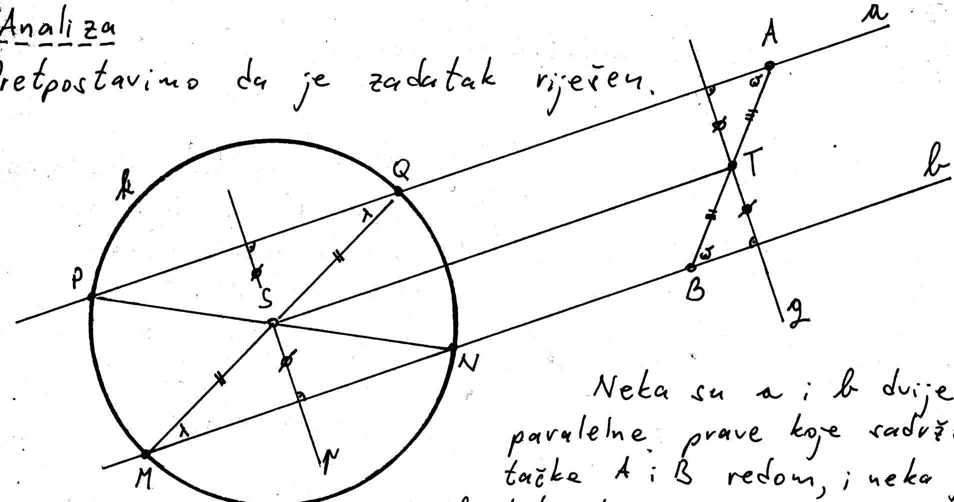
II rješenje:



(#) Date su tačke A i B i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsijeca na njima podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su a i b dvije paralelne prave koje sadrže tačke A i B redom, i neka je k data kružnica sa centrom u S koja na pravama odsijeca podudarne tetive PQ i MN.

Primjetimo da je $\square MNQP$ pravougaonik i da je
$MS \cong NS \cong PS \cong QS$ (zašto?). (ugao nad prečnikom...).

Neka je tačka T sredina duži AB.

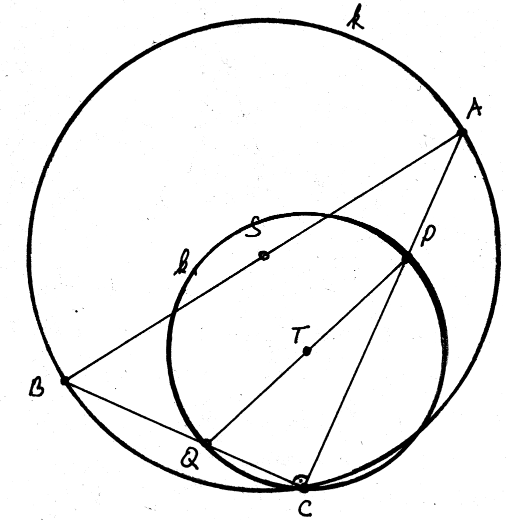
Dalje, duž TS je srednja linija $\square MBAQ$ ili četverougla $\square PNBA$ pa je $p(S,T) \parallel p(P,Q) \parallel p(M,N)$. Ovo možemo i dokazati tako što ćemo kroz S provući pravu p takvu da $p \perp b$ a time $p \perp a$, i kroz tačku T provući pravu g takvu da $g \perp a$ a time $g \perp b$. Sad primjetimo...

Kako pravu $p(S,T)$ možemo konstruisati, time možemo konstruisati i tražene prave a i b.

(#) Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli $\triangle ABC$ sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetimo da je $\measuredangle BCA$ ugao nad prečnikom.

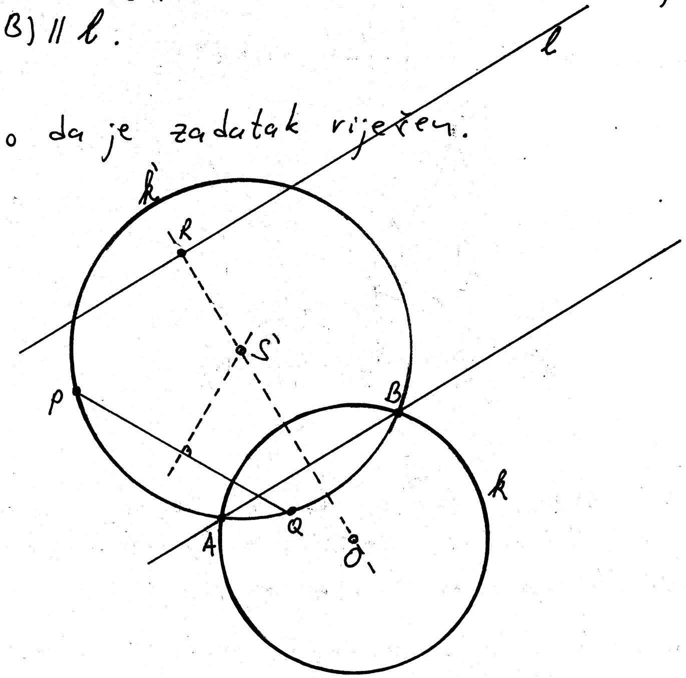
Ako oko $\triangle PQC$ opišemo kružnicu, kako je $\measuredangle QCP = 90°$ to je centar opisane kružnice k_1 oko $\triangle PQR$ u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i $\triangle ABC$.

Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B) \parallel l$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

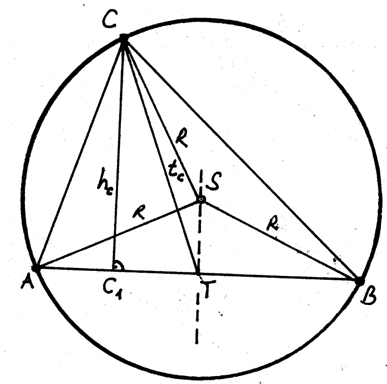


Neka je $k'(S', r')$ kružnica koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu $k(O,r)$ u tačkama A i B, tako da važi $p(A,B) \parallel l$ (gdje je l data prava).
Kako je PQ tetiva kružnice k' to centar S' leži na simetrali duži PQ.
AB je tetiva kružnica k' i k pa centri S' i O leže na simetrali tetive AB. Kako je $p(A,B) \parallel l$ i $p(O,S') \perp p(A,B)$ to je i $p(O,S') \perp l$.
Označimo sa $\{R\} = l \cap p(O,S')$.
Kako je data prava l i centar O to tačku R možemo konstruisati. Centar S' leži na presjeku simetrale duži PQ i prave $p(R,O)$ pa ga možemo konstruisati. Sad možemo konstruisati i traženu kružnicu k'.

Konstruisati trougao ΔABC ako su dati visina h_c, težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



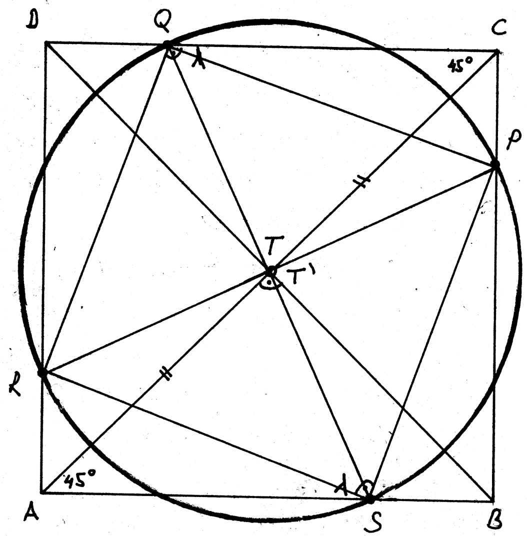
Neka je dat ΔABC takav da je $CC_1 = h_c$ visina spuštena na stranicu AB, $CT = t_c$ težišnica spuštena iz vrha C i R poluprečnik opisane kružnice oko Δ.

Kako su dati h_c, t_c to ΔCC_1T možemo konstruisati (imamo dvije stranice i pravi ugao).
Centar S kružnice opisane oko trougla leži na simetrali stranice AB (koju možemo konstruisati zato što imamo tačku T).
S je udaljen od tjemena C za dužinu R pa ga možemo možemo konstruisati.
Sad bez problema možemo konstruisati tačke A i B, a time i ΔABC.

(#) U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je u dati kvadrat $\square ABCD$ upisan neki drugi kvadrat $\square PQRS$.

Iz osobina kvadrata znamo da se dijagonale polove pod pravim uglom.

Označimo sa $\{T\} = AC \cap BD$ a sa $\{T'\} = PR \cap QS$.

$\square PQRS$ je tetivni četverougao pa oko njega možemo opisati kružnicu.

U dokazu ćemo pokazati da je $T \equiv T'$ centar opisane kružnice $\square PQRS$.

Kako znamo dužinu RS nije teško dobiti poluprečnik kružnice RT a time i $\square PQRS$.

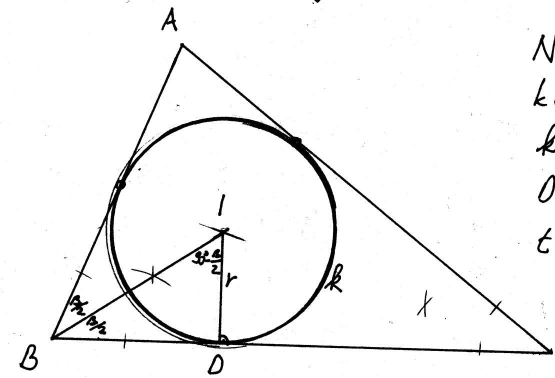
(Napomena. U dokazu treba da pokažemo i da je dobijeni četverougao kvadrat. Kako je

$\sphericalangle CTB \cong \sphericalangle BTA = 90°$

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



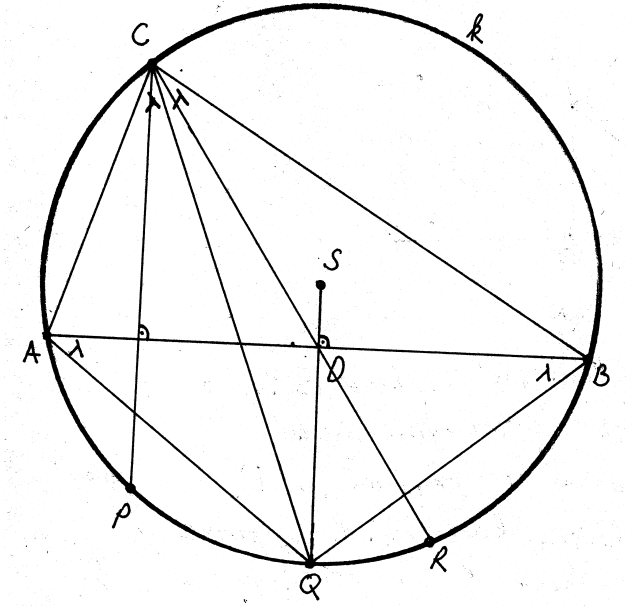
Neka je dat ΔABC u koji je upisana kružnica $k(I, r)$. Označimo sa D ortogonalnu projekciju tačke I na stranicu $BC = a$. (prema tome $ID = r$).

U ΔBDI znamo stranicu DI i dva ugla pa ga možemo konstruisati. Kako znamo dužinu stranice a to nije problem konstruisati i tačku C. Tjeme A ćemo dobiti kao presjek tangenti iz B i C na kružnicu k, a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla ΔABC.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica opisana oko ΔABC i neka su P, Q i R tačke u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz vrha C sijeku kružnicu.

Kako je $\square AQBC$ tetivni i $\measuredangle ACQ \cong \measuredangle BCQ$ $\Rightarrow$ $\measuredangle ABQ \cong \measuredangle QAB$ $\Downarrow$ ΔAQB jkk

pa tačka Q pripada simetrali stranice AB.

Označimo sa D $\{D\} = QS \cap AB$.

Primjetimo da je $p(Q,S) \parallel p(P,C)$. ...(*)

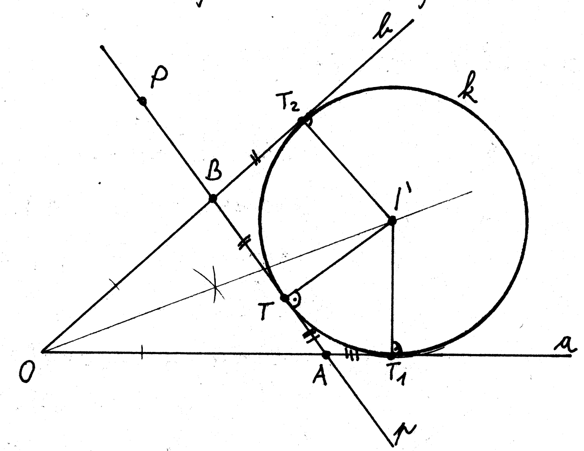
Kako kružnicu $k(S, SQ)$ mogu konstruisati to iz (*) mogu konstruisati i tačku C.

Sad bez problema mogu dobiti tačku D a time i ΔABC.

(#) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku P i od datog ugla $\measuredangle aOb$ odsjeca trougao ΔOAB.

Stranici AB trougla ΔOAB pripišimo kružnicu k sa centrom u I'.

Označimo sa T tačku dodira kružnice k i prave p, a sa T_1 i T_2 tačke dodira kružnice k sa pravima a i b.

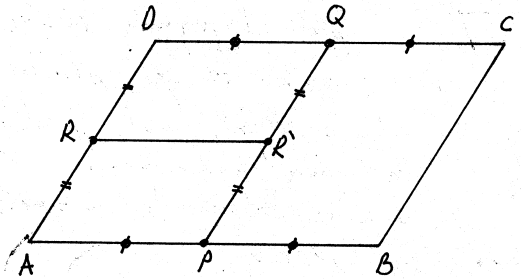
Iz osobina tangenti na kružnicu znamo da je $AT \cong AT_1$ i da je $BT \cong BT_2$ (da li bi ovo znali dokazati?)

Kako je dat $\measuredangle aOb$ i obim trougla ΔOAB tačke T_1 i T_2 nije problem konstruisati, a time i kružnicu k. Ako iz tačke P povučemo tangentu na k dobićemo tačke A i B, a time i ΔOAB.

(#) Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat paralelogram $\square ABCD$ i neka su tačke P, Q i R redom sredine stranica AB, CD i AD.

P sredina AB, Q sredina CD, $AB \cong CD \Rightarrow AP \cong PB \cong CQ \cong DQ$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $PB \cong CQ \Rightarrow \square PBCQ$ paralelogram.

Slično $\square APQD$ paralelogram.

Označimo sa R' sredinu duži PQ.

$p(A,D) \parallel p(P,Q)$, $AD \cong PQ$, R sredina AD, R' sredina PQ

$\Rightarrow$ $AR \cong PR'$ i $p(A,R) \parallel p(P,R') \Rightarrow \square APR'R$ paralelogram

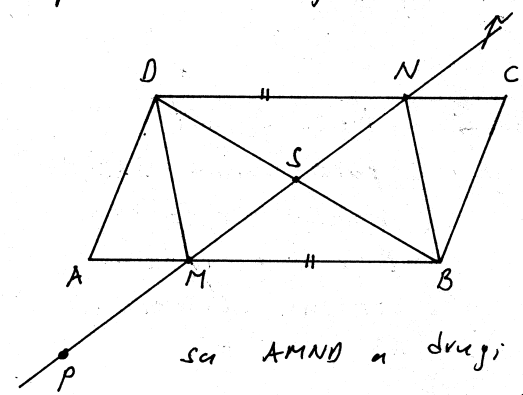
$DR \cong QR'$ i $p(D,R) \parallel p(Q,R') \Rightarrow \square DRR'Q$ paralelogram

Date su tačke P, Q i R. Sad nije problem konstruisati tačke A i D a poslije njih i tačke B i C.

(#) Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data tačka P u ravni paralelograma $\square ABCD$ i neka je p prava koja dijeli dati paralelogram na dva podudarna dijela (jedan dio označimo sa $AMND$ a drugi sa $MBCN$).

Iz podudarnosti ova dva dijela slijedi da je $BM \cong DN$. (odgovarajuće stranice i odgovarajući uglovi su podudarni).

$MB \parallel DN \wedge MB \cong DN \Rightarrow \square MBND$ je paralelogram u kome prava p sadrži dijagonalu MN

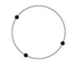
Dijagonale u paralelogramu se polove $\Rightarrow$ prava p sadrži sredinu S dijagonale BD (S je sredina i dijagonale AC).

Prema tome tražena prava p sadrži date tačke P i S pa je možemo konstruisati.

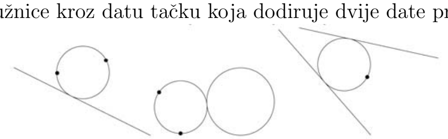
Apolonijev problem

Apolonijev problem može se podjeliti u deset zasebnih problema:

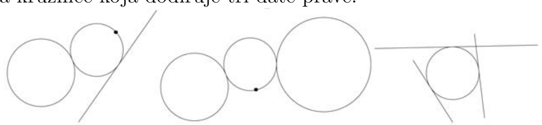
1. Konstrukcija kružnice kroz tri date tačke.



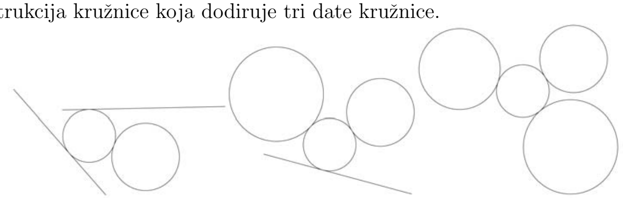
2. Konstrukcija kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.
3. Konstrukcija kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.
4. Konstrukcija kružnice kroz datu tačku koja dodiruje dvije date prave.



5. Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.
6. Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.
7. Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri date prave.



8. Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.
9. Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije date kružnice i datu pravu.
10. Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri date kružnice.



U analizi i konstrukciji Apolonijevog problema koristimo sljedeće oznake:
A, B, C date tačke.
k_1, k_2, k_3 date kružnice.
t_1, t_2, t_3 date prave.
T_1, T_2, T_3,... dodirne tačke tangenti na kružnice.
k, $\bar{k}$, $\bar{\bar{k}}$,... tražene kružnice.
E, F, G,... dodirne tačke kružnica.
L, M, N, U, V, Z,... dodirne tačke kružnice i prave.
P, Q, R, S, H, T,... presječne tačke pravih.
k', k'', k''',... pomočne kružnice.

Napomena: 5. Apolonijev problem se svodi na 2. Apolonijev problem. 6. Apolonijev problem se svodi na 3. Apolonijev problem. 8. Apolonijev problem sesvodi na 4. Apolonijev problem. 9. Apolonijev problem se svodi na 5. Apolonijev problem. 10. Apolonijev problem se svodi na 6. Apolonijev problem.

Urađeni zadaci

1. Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.

2. Konstruisati kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.

3. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.

4. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje dvije date prave.

5. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

6. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

7. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

8. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.

9. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date kružnice i datu pravu.

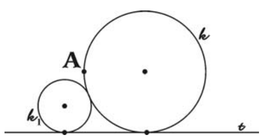
10. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date kružnice.

11. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

12. Date su prave p i q, $p \perp q$ i data je tačka A takva da $A \notin p$ i $A \notin q$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i q.

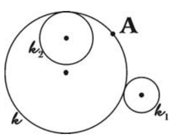
13.

Dati je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A, dodirivati krug k_1 i pravu t kao na skici.



14.

Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici:



Zadaci za vježbu

15. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

16. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i datu kružnicu u datoj tački te kružnice.

17. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje datu pravu u datoj tački.

18. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave od kojih jednu u datoj tački.

19. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje datu kružnicu u datoj tački.

20. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i dvije date kružnice jednakih polupREčnika.

21. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja prolazi kroz dvije date tačke.

22. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu pravu i prolazi kroz datu tačku.

23. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu kružnicu i prolazi kroz datu tačku.

24. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje date prave.

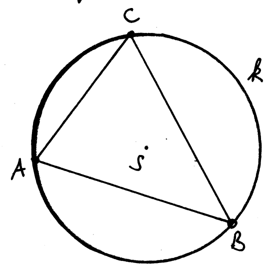
25. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu.

26. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje dvije date kružnice.

1.ˇ Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

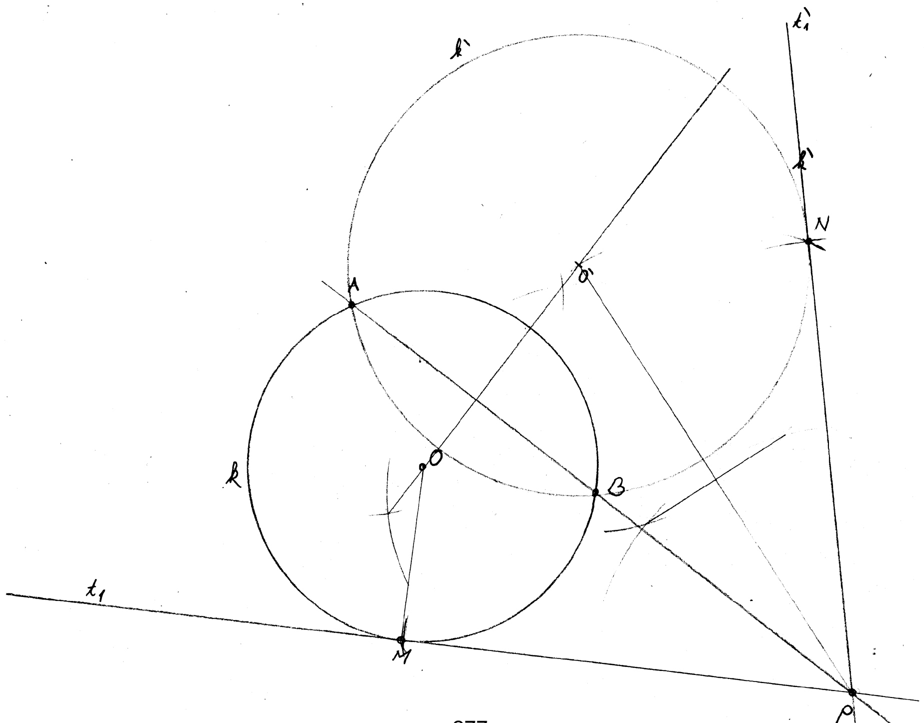


Neka je k data kružnica koja prolazi kroz tačke A, B i C. Ako spojimo tačke A i B, A i C i tačke B i C dobićemo da je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$. Centar opisane kružnice se nalazi na presjeku simetrala stranica.

2. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.

Analiza

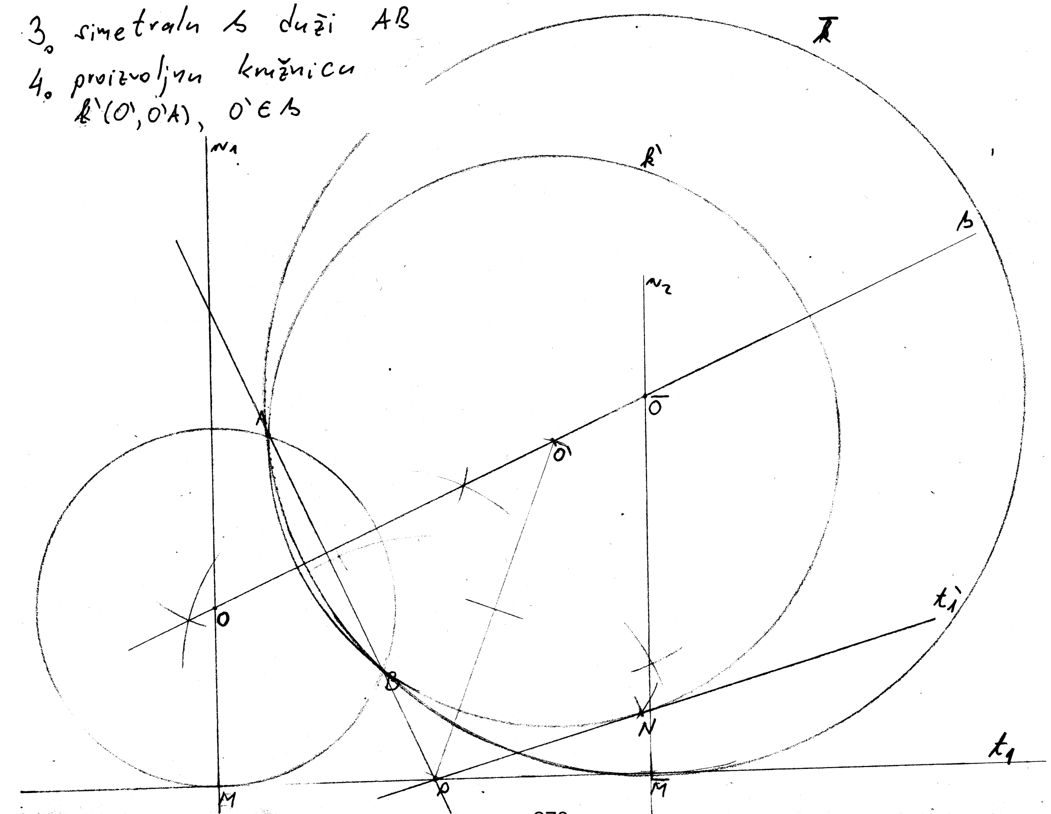
Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica koja dodiruje pravu t_1 u tački M i koja prolazi kroz tačke A i B. Označimo sa P $\{P\} = p(A,B) \cap t_1$. Neka je $k'(O', O'A')$ proizvoljna kružnica takva da O' pripada simetrali duži AB. Neka je t_1' tangenta na kružnicu k' takva da je $P \in t_1'$ i sa N označimo tačku dodira tangente t_1' i kružnice k'. Primjetimo da je $PM^2 = PA \cdot PB = PN^2 \Rightarrow PM = PN$. Kako su tačke A, B i prava t_1 date nije teško konstruisati kružnicu k' i tačku P. Poslije toga ćemo konstruisati tačke N i M, pa i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. A, B, t_1
2. $p(A,B) \cap t_1 = \{P\}$
3. simetralu s duži AB
4. proizvoljnu kružnicu $k'(O', O'A)$, $O' \in s$
5. tangentu t_1' na kružnicu k' iz tačke P
6. $t_1' \cap k' = \{N\}$
7. $k(P, PN) \cap t_1 = \{M, \overline{M}\}$



8. $n_1 \perp t_1 \wedge n_1 \ni M$

$n_2 \perp t_1 \wedge n_2 \ni \bar{M}$

9. $n_1 \cap s = \{O\}$

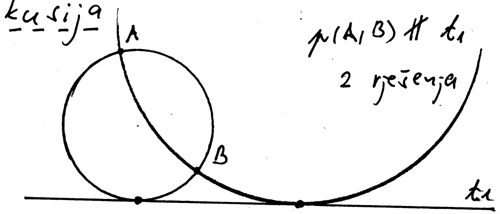
$n_2 \cap s = \{\bar{O}\}$

10. $k(O, OA)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$

Dokaz

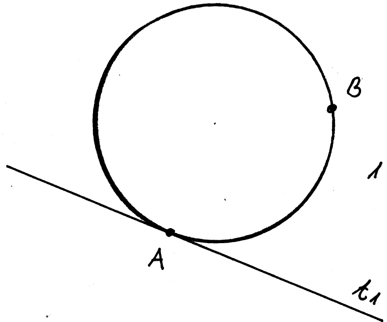
Dokaz da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačke A i B i dodiruje pravu t_1 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

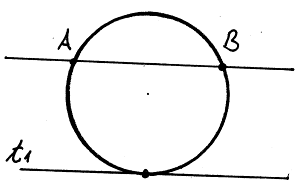


$p(A,B) \nparallel t_1$

2 rješenja



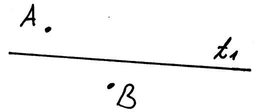
1 rješenje



$p(A,B) \parallel t_1$

1 rješenje

nema rješenja



nema rješenja

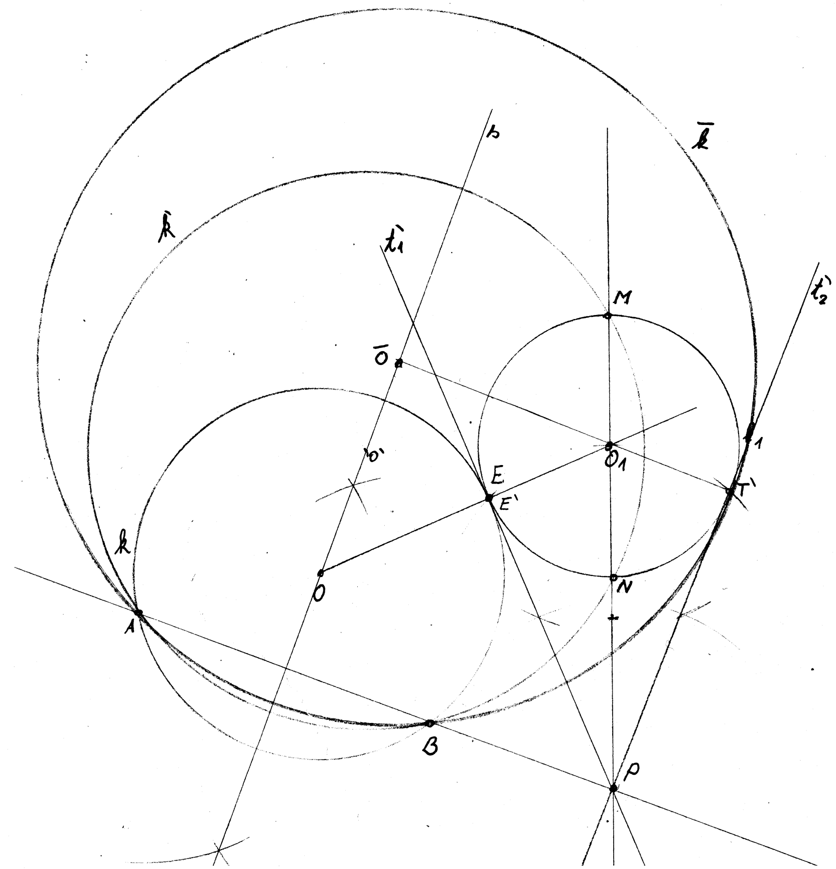
3. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je k kružnica koja dodiruje kružnicu k_1 u tački E i koja prolazi kroz tačke A i B. Neka je $k'(O', O'A)$ proizvoljna kružnica takva da siječe kružnicu k_1 u tačkama M i N i O' pripada simetrali duži AB.

Označimo sa $\{P\} = p(M,N) \cap p(A,B)$. Iz tačke P neka su t_1' i t_2' tangente na kružnicu k_1 i neka su E' i T' dodirne tačke tangenti i kružnica redom.



Primjetimo da je $PE'^2 = PT'^2 = PM \cdot PN = PA \cdot PB \Rightarrow$

$\Rightarrow PE'^2 = PA \cdot PB \Rightarrow p(P, E')$ tangenta na kružnicu k

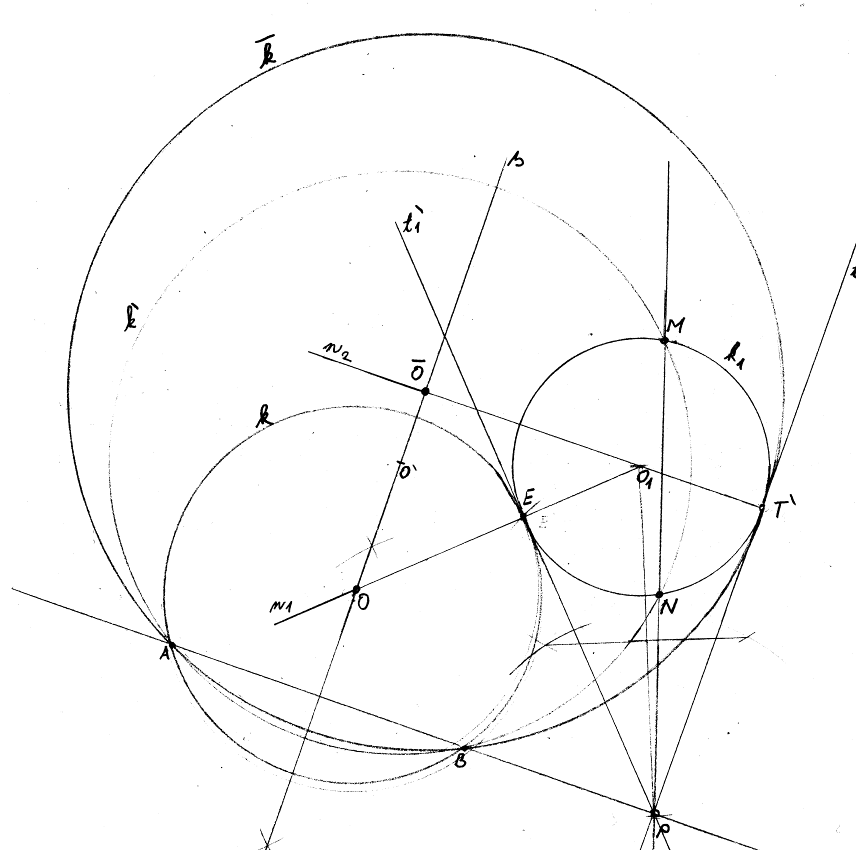
$\Rightarrow E' \equiv E$ (E je tačka dodira kružnice k_1 i k).

Kako su date tačke A i B i kružnica k_1 to kružnicu k' i tačke M i N nije teško konstruisati a samim tim i tačke E i T'. Kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. A, B, k_1
2. simetralu s duži AB
3. proizvoljnu kružnicu $k'(O', O'A)$: $O' \in s \wedge k' \cap k_1 \neq \emptyset$
4. $k' \cap k_1 = \{M, N\}$
5. $p(M,N) \cap p(A,B) = \{P\}$
6. tangente t_1' i t_2' na k_1
7. $t_1' \cap k_1 = \{E\}$

   $t_2' \cap k_1 = \{T'\}$



8. $n_1: n_1 \perp t_1' \wedge n_1 \ni E$
$n_2: n_2 \perp t_2' \wedge n_2 \ni T'$

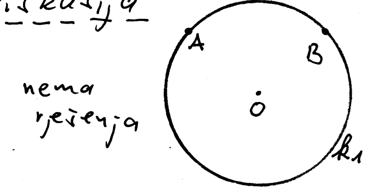
9. $n_1 \cap s = \{O\}$, $n_2 \cap s = \{\bar{O}\}$

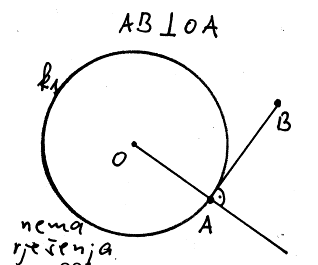
10. $k(O, OA)$
$\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$

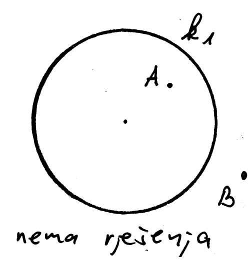
Dokaz

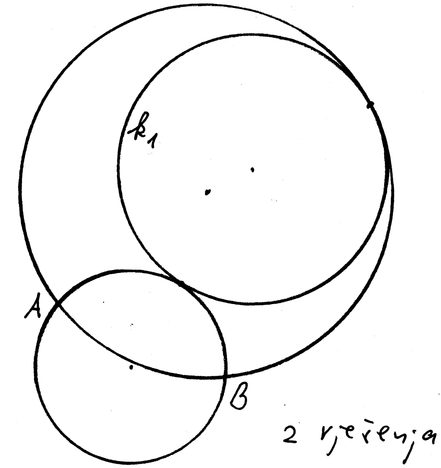
Da konstruisane kružnice k i $\bar{k}$ prolaze kroz tačke A i B i dodiruju datu kružnicu k' slijedi iz Analize i Konstrukcije.

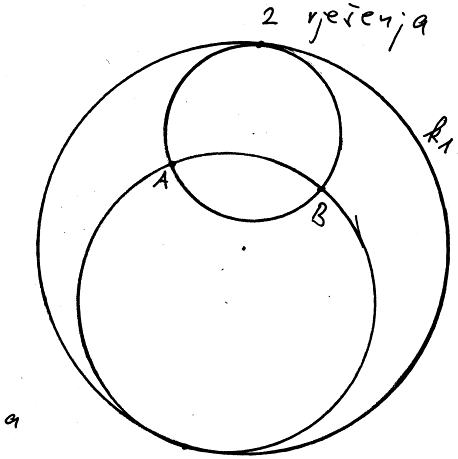
Diskusija

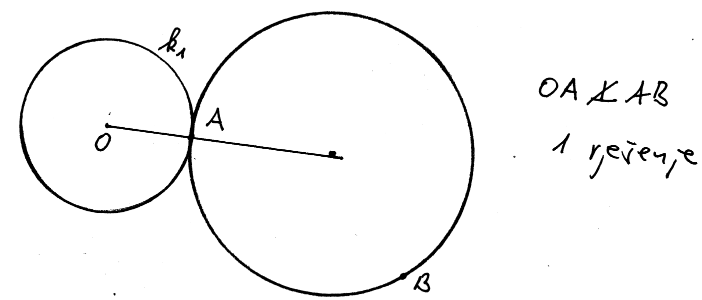












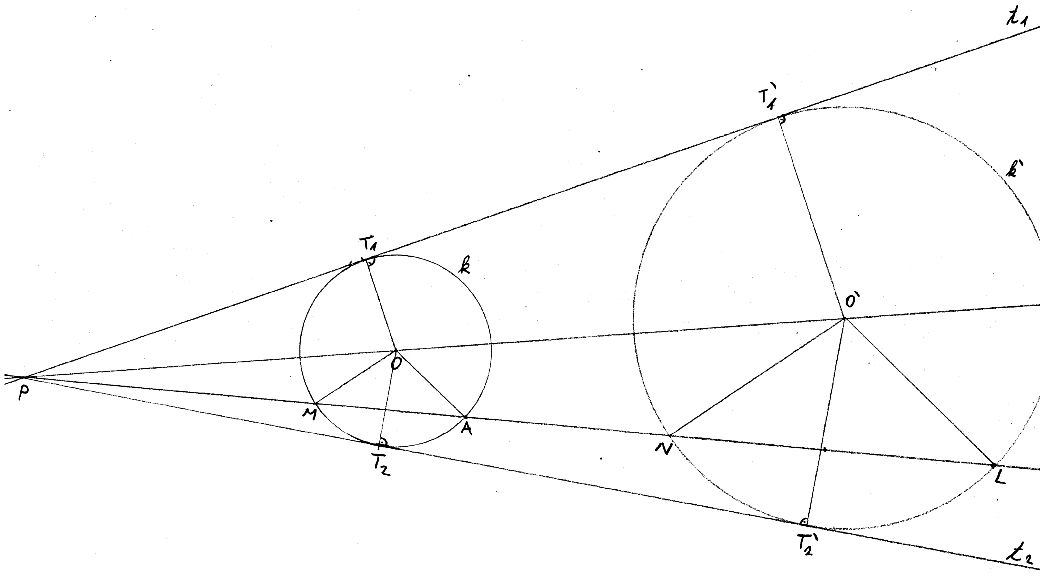
4. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je k kružnica koja dodiruje prave t_1 i t_2 redom u tačkama T_1 i T_2 i neka k prolazi kroz tačku A. Označimo sa $\{P\} = t_1 \cap t_2$.

Neka je $k'(O', O'T_1')$ kružnica takva da je O' proizvoljna tačka na simetrali $\sphericalangle t_1 P t_2$, a T_1' ortogonalna projekcija tačke O' na pravu t_1. Kako je $O' \in sim \sphericalangle t_1 P t_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow O'$ podjednako udaljena od t_1 i t_2 pa je t_2 tangenta na kružnicu k'. Označimo sa T_2' tačku



dodira tangente t_2 i kružnice k'. Neka je $p(P,A) \cap k = \{M, A\}$, $p(P,A) \cap k' = \{N, L\}$, r' poluprečnik kružnice k' i r poluprečnik od k.

$$OT_1 \parallel O'T_1' \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \frac{PO'}{PO} = \frac{PT_1'}{PT_1} = \frac{r'}{r}$$

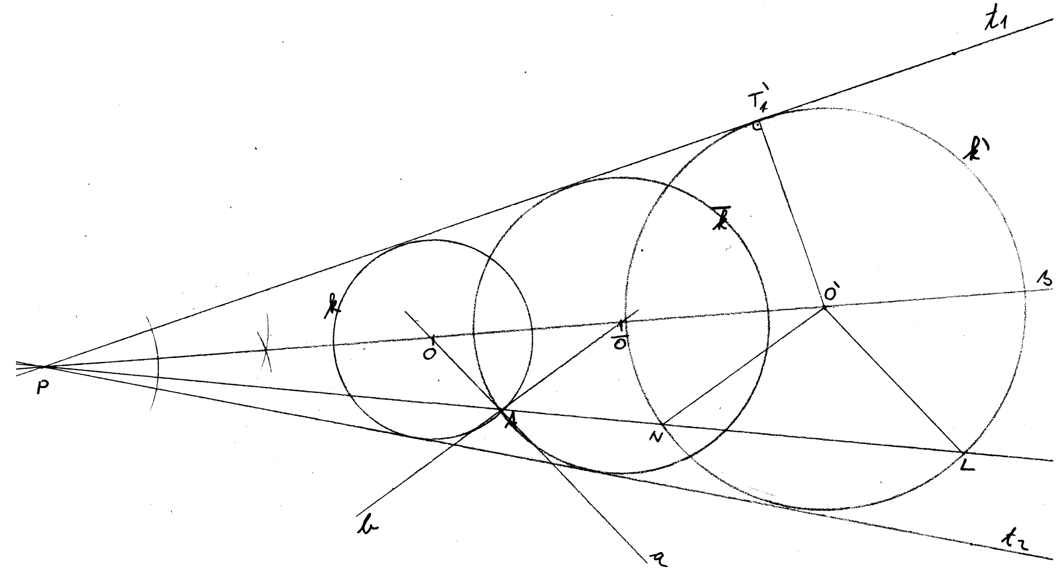
$$OT_2 \parallel O'T_2 \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \frac{PO'}{PO} = \frac{PT_2'}{PT_2} = \frac{r'}{r}$$

Kružnica k' je dobijena homotetijom iz kružnice k sa koeficijentom $\frac{r'}{r} \Rightarrow O'L \parallel OA$ i $MO \parallel NO'$. Kružnica k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $A,\ t_1,\ t_2$
2. $t_1 \cap t_2 = \{P\}$
3. s simetrala $\sphericalangle t_1 S t_2$
4. kružnica $k'(O', O'T_1)$ gdje je O' proizvoljna tačka na s a T_1' ortogonalna projekcija tačke O' na t_1

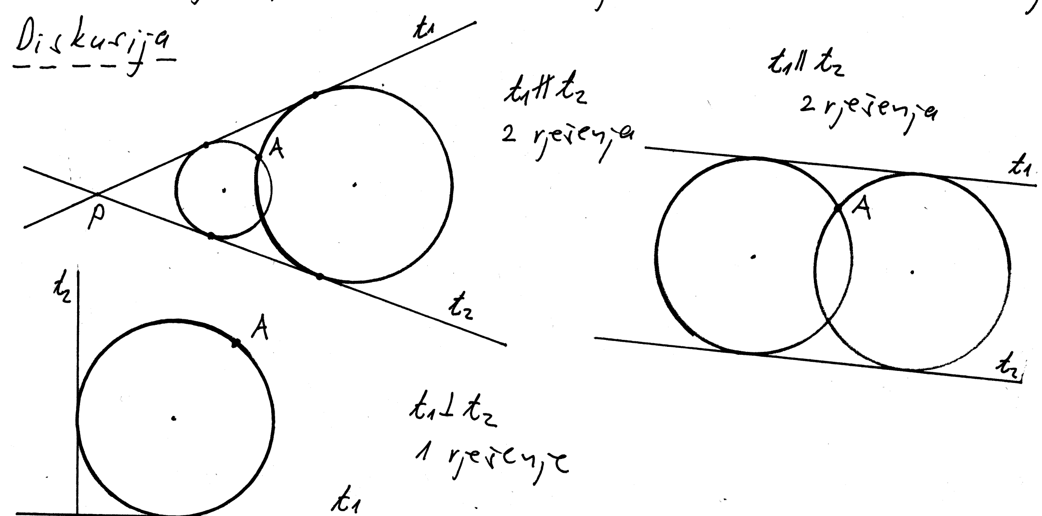
5. $p(P,A) \cap k' = \{N, L\}$
6. $a: a \parallel O'L \wedge a \ni A$
   $b: b \parallel O'N \wedge b \ni A$
7. $a \cap s = \{O\}$, $b \cap s = \{\bar{O}\}$
8. $k(O, OA)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$.

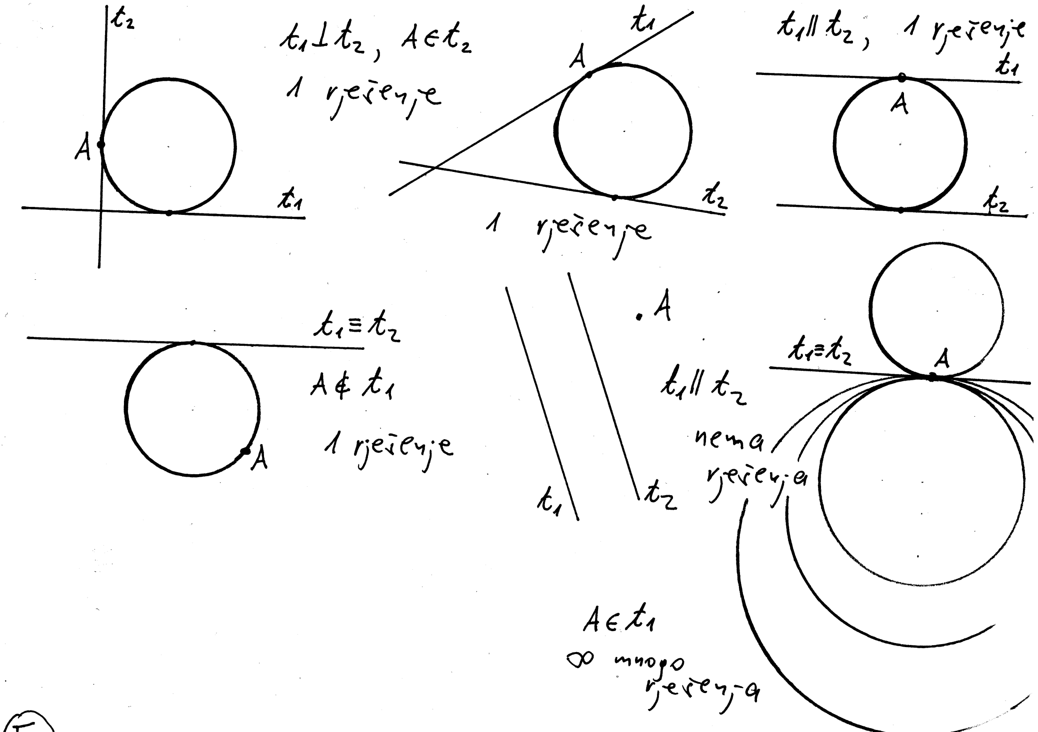


Dokaz

Da konstruisane kružnice k i $\bar{k}$ prolaze kroz tačku A i da dodiruju prave t_1 i t_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija





5. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

Analiza

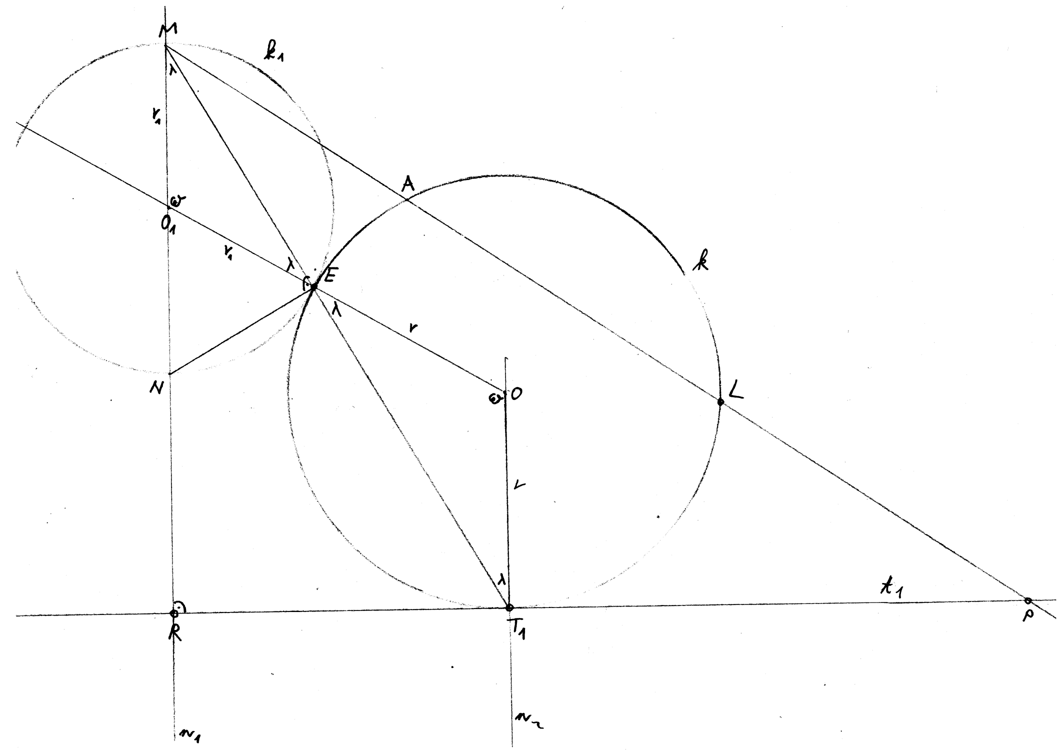
Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t_1 u tački T_1, kružnicu $k_1(O_1,r_1)$ u tački E i prolazi kroz tačku A. Označimo sa n_1 i n_2 redom normale iz tački O_1 i O na pravu t_1. Neka je $n_1 \cap k_1 = \{M,N\}$, $n_1 \cap t_1 = \{R\}$ i R-N-M. E je tačka dodira kružnica k_1 i k pa su tačke O_1, E i O kolinearne.

$n_1 \parallel n_2$ i $p(O,O_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MO_1E = \measuredangle EOT_1 = \omega$

ΔMO_1E i ΔEOT_1 jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1ME = \measuredangle O_1EM = \measuredangle OET_1 = \measuredangle ET_1O = \lambda$
$\Rightarrow$ tačke M, E i T_1 su kolinearne.

Dalje primjetimo da je:



$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NEM = \measuredangle MRT_1 = 90^\circ \\ \measuredangle EMN = \measuredangle RMT_1 = \lambda \\ \measuredangle MNE = \measuredangle RT_1M \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta MNE \sim \Delta MT_1R$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MN}{MT_1} = \frac{ME}{MR} \Rightarrow MN \cdot MR = ME \cdot MT_1 \quad \ldots(*)$$

Označimo sa $\{P\} = p(M,A) \cap t_1$; $\{L, A\} = p(M,A) \cap k$.

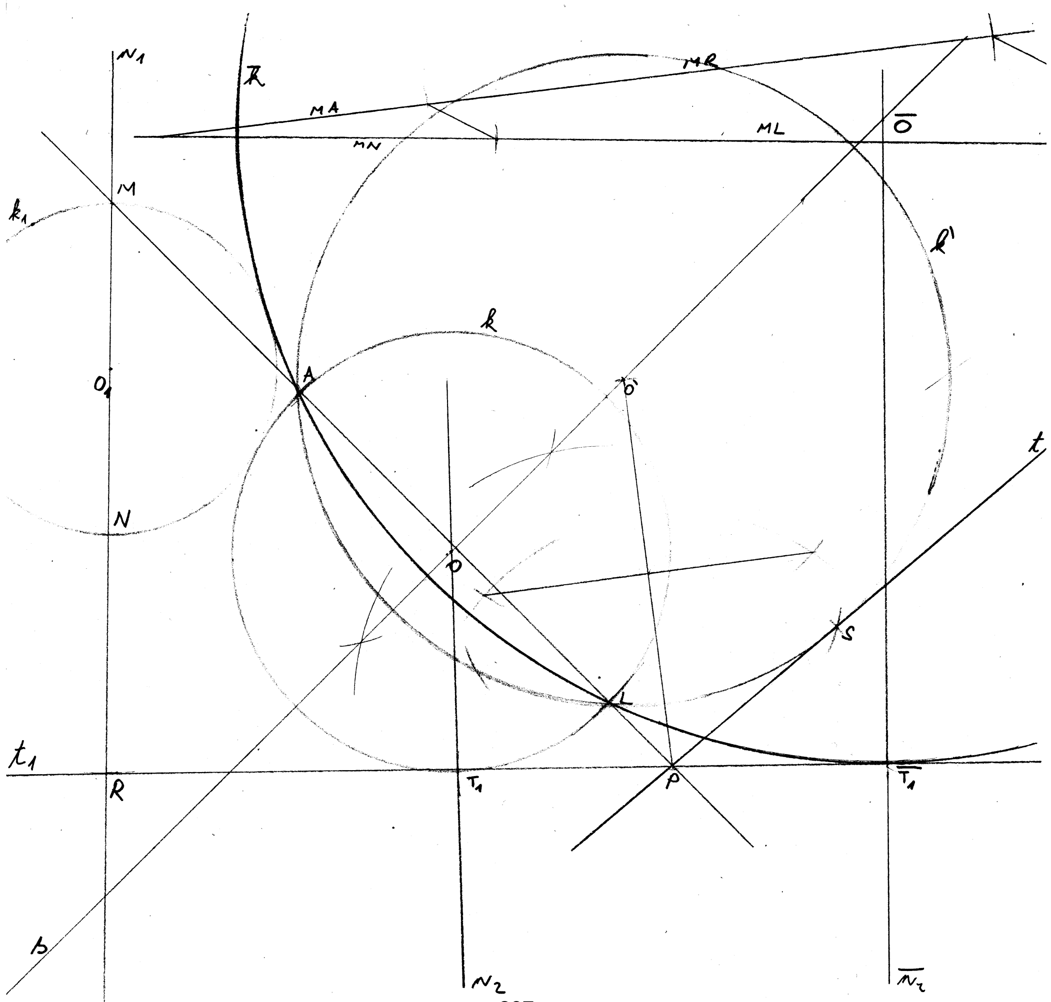
Primjetimo da je $MA \cdot ML = ME \cdot MT_1 \xRightarrow{(*)}$

$MA \cdot ML = MN \cdot MR$ tj. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MA}$.

Kako tačke M, N, R možemo konstruisati a tačka A je data tačka to možemo konstruisati i tačku L. Sad imamo dvije tačke A i L i pravu t_1 (2 Apolonijev problem) pa kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

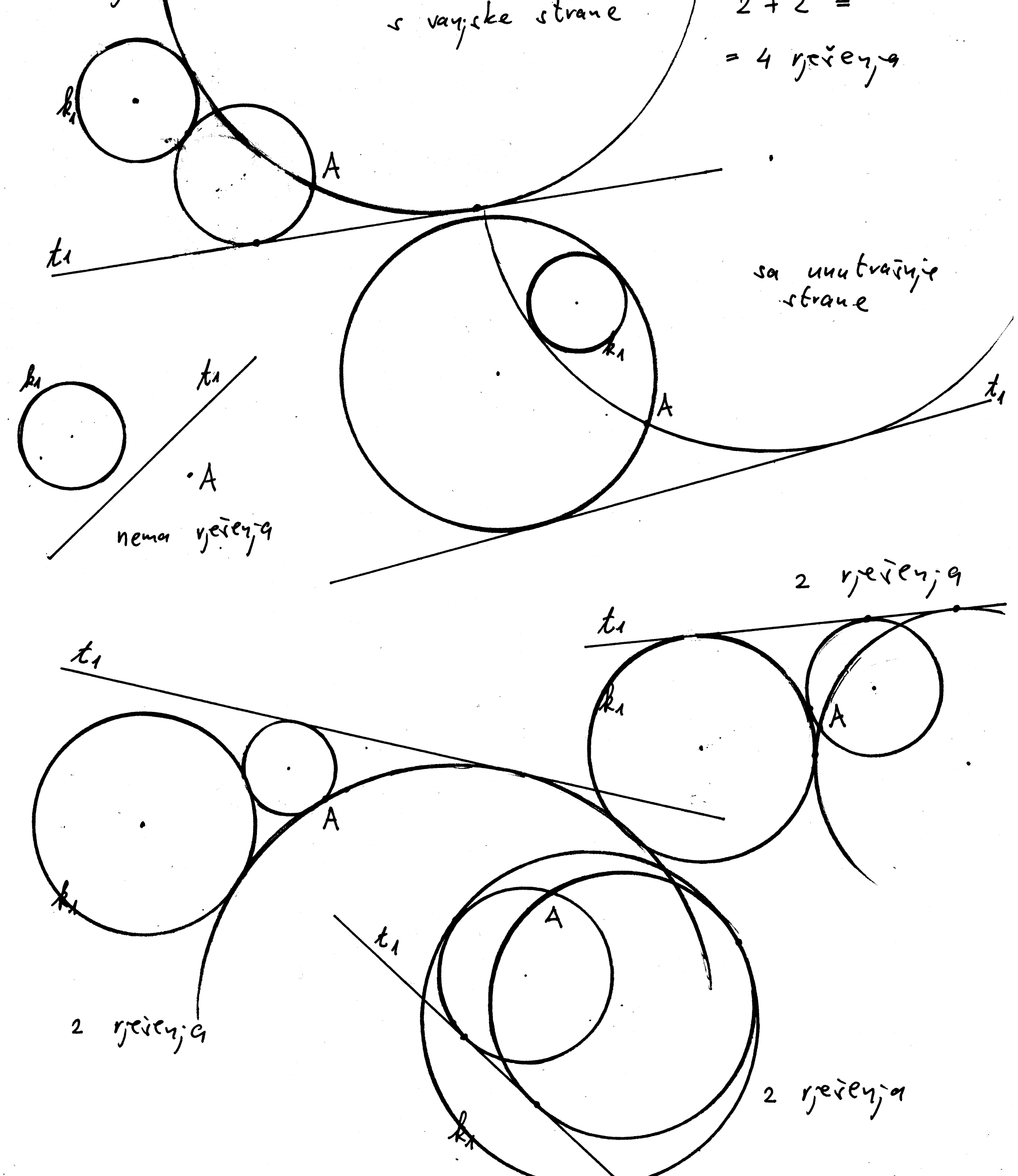
1. $A,\ t_1,\ k_1$
2. $n_1:\ n_1 \ni O_1 \ \wedge\ n_1 \perp t_1$
3. $n_1 \cap k_1 = \{M, N\}$
   $n_1 \cap t_1 = \{R\}$, $R-M-N$
4. $p(M,A) \cap t_1 = \{P\}$
5. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MA}$
6. $k(M, ML) \cap p(M,A) = \{L\}$
7. s simetrala AL
8. proizvoljna kružnica $k'(O', O'A)$
   $O' \in s$
9. tangenta t iz P na k'
10. $t \cap k' = \{S\}$
11. $k(P, PS) \cap t_1 = \{T_1, \overline{T_1}\}$
12. $n_2:\ n_2 \perp t_1 \ \wedge\ n_2 \ni T_1$
    $\overline{n_2}:\ \overline{n_2} \perp t_1 \ \wedge\ \overline{n_2} \ni \overline{T_1}$
13. $n_2 \cap s = \{O\}$, $\overline{n_2} \cap s = \{\overline{O}\}$
14. $k(O, OA)$, $\overline{k}(\overline{O}, \overline{O}A)$ . . .

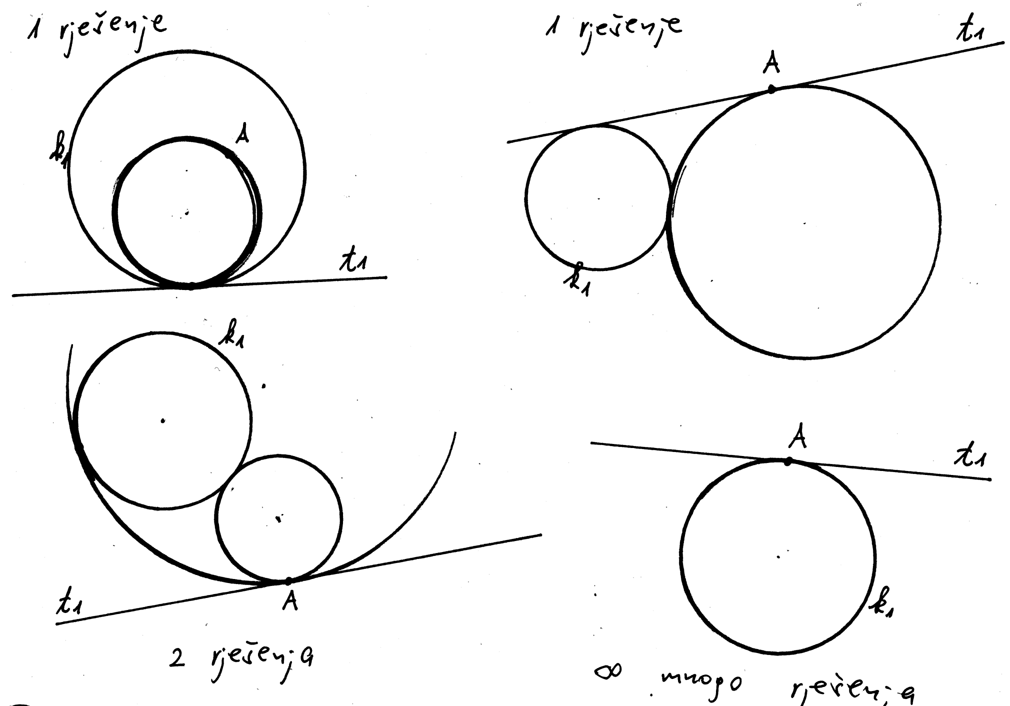


Dokaz

Da konstruisane kružnice k i $\overline{k}$ prolaze kroz tačku A, dodiruju kružnicu k_1 i pravu t_1 slijedi iz Analize i Konstrukcije

Diskusija



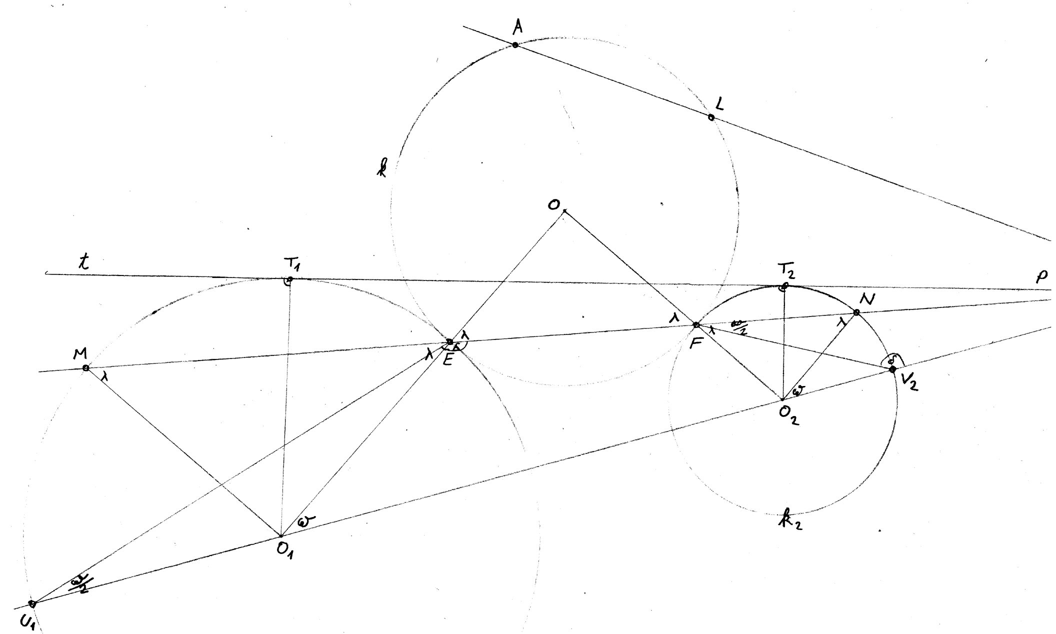


(6.) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka tražena kružnica $k(O,r)$ dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ redom u tačkama E i F, i prolazi kroz tačku A. Kako je E dodirna tačka kružnica k_1 i k_2 to su tačke O_1, E i O kolinearne. Primjetimo da su i tačke O, F i O_2 kolinearne. Označimo sa $\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$.
Dalje neka je $p(E,F) \cap k_1 = \{M,E\}$ i $p(E,F) \cap k_2 = \{F,N\}$.
Primjetimo da su trouglovi ΔMO_1E, ΔEFO i ΔFO_2N jkk a kako imaju podudarne unakrsne uglove to je i $\sphericalangle EMO_1 = \sphericalangle O_1EM = \sphericalangle OEF = \sphericalangle EFO = \sphericalangle NFO = \sphericalangle O_2NF = \lambda$.
Kako su tačke N, F, E i M na istoj pravoj

$$\Rightarrow p(O_1,M) \parallel p(O_2,F) \quad \text{i} \quad p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$$



Označimo sa $\{U_1,U_2\} = p(O_1,O_2) \cap k_1$ i $\{V_1,V_2\} = p(O_1,O_2) \cap k_2$.
Kako je ω centralni ugao $\Rightarrow \sphericalangle EU_1P = \sphericalangle PF_2 = \frac{\omega}{2}$.

$$\text{Imamo} \left. \begin{array}{l} \sphericalangle EPU_1 = \sphericalangle V_2PF \\ \sphericalangle EU_1P = \sphericalangle PFV_2 = \frac{\omega}{2} \\ \sphericalangle PEV_1 = \sphericalangle FV_2P \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta EU_1P \sim \Delta V_2PF$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PU_1}{PF} = \frac{PE}{PV_2} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PV_2 \quad \ldots (*)$$

Primjetimo da je i $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \ldots (**)$

$$(*) \text{ i } (**) \Rightarrow PA \cdot PL = PU_1 \cdot PV_2 \Rightarrow PL = \frac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$$

Da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

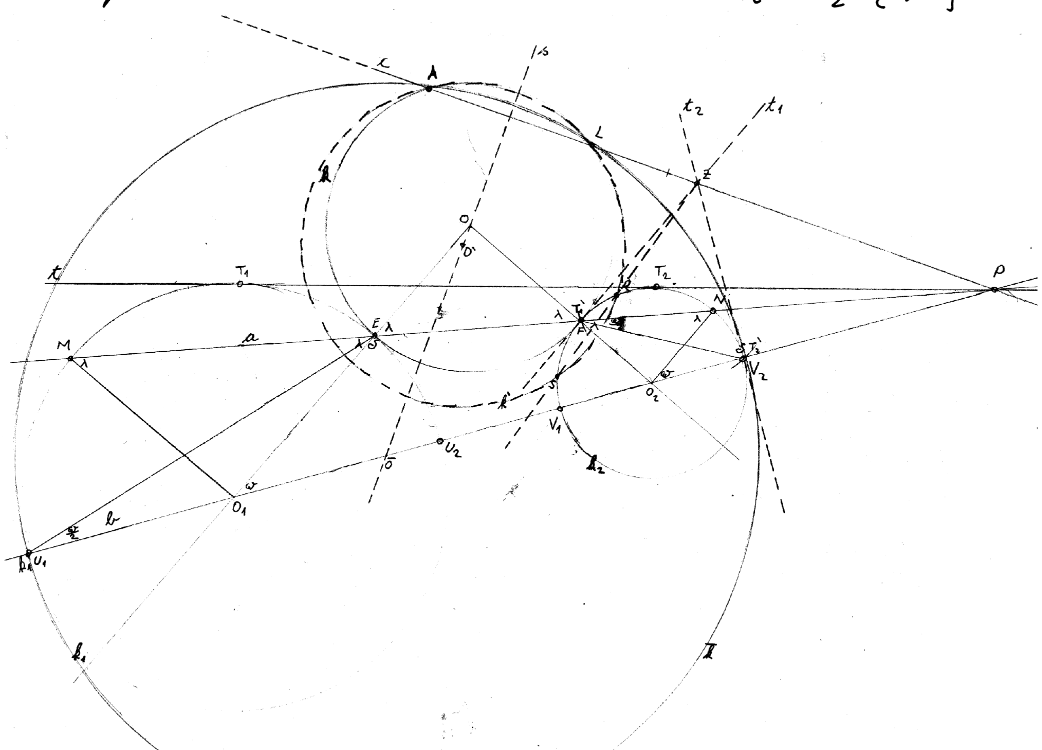
$$\left. \begin{array}{l} p(O_1,M) \parallel p(O_2,F) \xRightarrow{T.T.} \frac{PM}{PF} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{MO_1}{FO_2} = \frac{r_1}{r_2} \\ p(O_1,E) \parallel p(O_2,N) \xRightarrow{T.T.} \frac{PE}{PN} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ je centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 sa koeficijentom sličnosti $\frac{r_1}{r_2}$.

Ako pretpostavimo da je $p(P, T_2)$ tangenta kružnice k_2 (gdje je $T_2 \in k_2$), kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku $T_2 \in k_2$ preslikava u tačku $T_1 \in k_1 \Rightarrow p(P, T_1)$ je tangenta kružnice k_1. Prema tome tačku P možemo konstruisati ($p(O_1, O_2) \cap p(T_1, T_2) = \{P\}$). Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na 3 Apolonijev problem.

Konstrukcija

1. A, $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$
2. $p(O_1, O_2) \cap k_1 = \{U_1, U_2\}$
   $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{V_1, V_2\}$
3. tangentu t na kružnice k_1 i k_2, $t \cap k_1 = \{T_1\}$, $t \cap k_2 = \{T_2\}$
4. $t \cap p(O_1, O_2) = \{P\}$
5. prava $c = p(A, P)$
6. tačka L na pravoj $p(P, A)$ takva da je $PL = \dfrac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$
7. simetrala s duži AL
8. $k'(O', O'A)$: $O' \in s \wedge k' \cap k_2 = \{S, R\}$

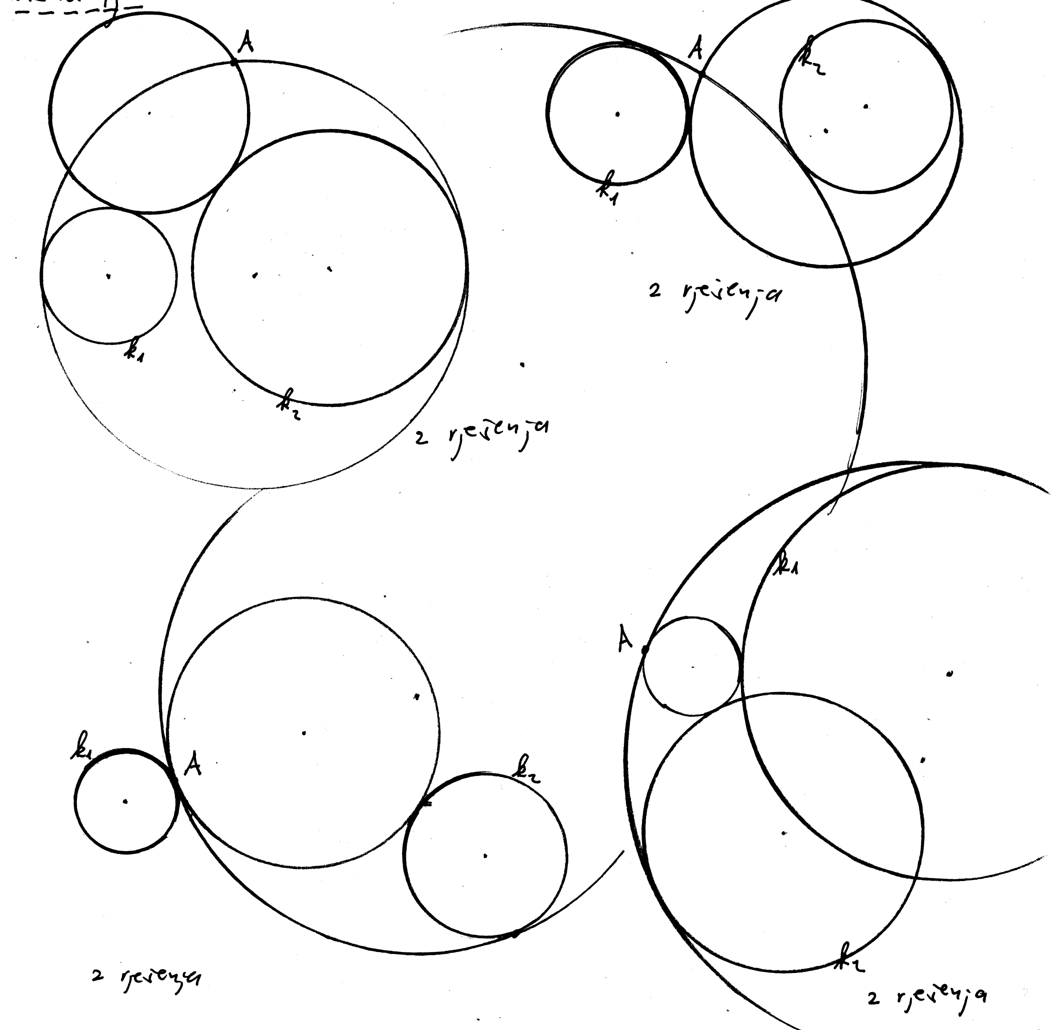


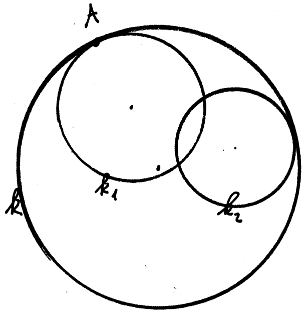
9. $p(S, R) \cap p(P, A) = \{Z\}$
10. tangente t_1' i t_2' na $k_2(O_2, r_2)$
11. $t_1 \cap k_2 = \{T_1'\}$, $t_1 \cap k_2 = \{T_2'\}$
12. $p(O_2, T_1') \cap s = \{O\}$
    $p(O_2, T_2') \cap s = \{\bar{O}\}$
13. $k = k(O, OA)$
    $\bar{k} = k(\bar{O}, \bar{O}A)$

Dokaz

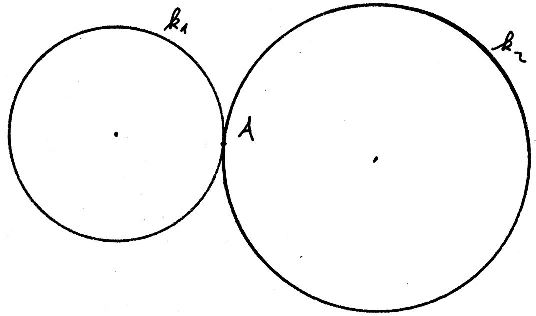
Da konstruisane kružnice prolaze kroz tačku A i da dodiruju kružnice k_1 i k_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija





1 rješenje

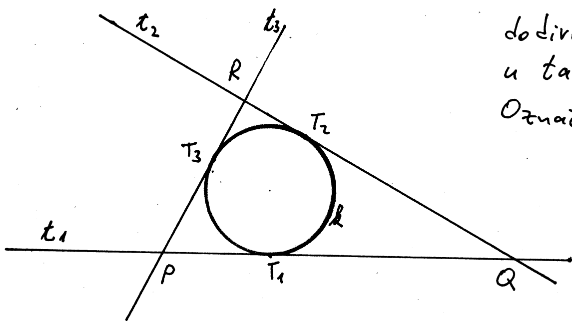


∞ mnogo rješenja

7₀ Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

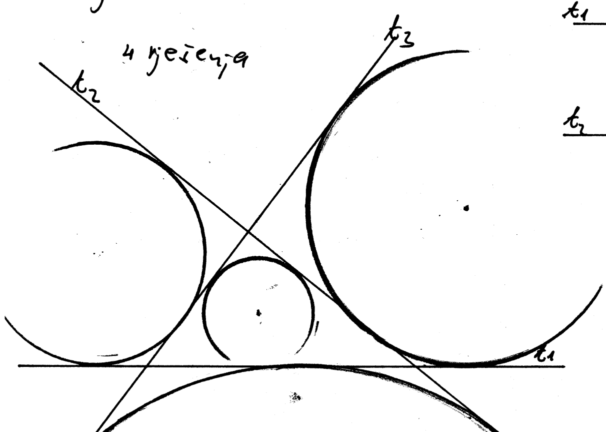


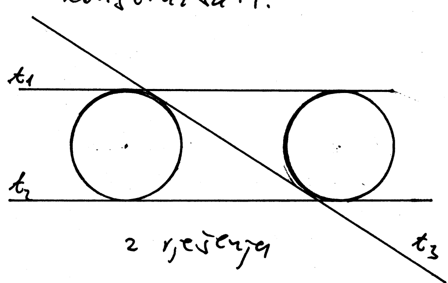
Neka tražena kružnica k dodiruje prave t_1, t_2 i t_3 redom u tačkama T_1, T_2 i T_3. Označimo sa $\{P\} = t_1 \cap t_3$, $\{Q\} = t_1 \cap t_2$ i $\{R\} = t_2 \cap t_3$.

Kružnica k je upisana u $\triangle PQR$ pa je možemo konstruisati.

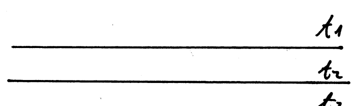
Diskusija

4 rješenja





2 rješenja

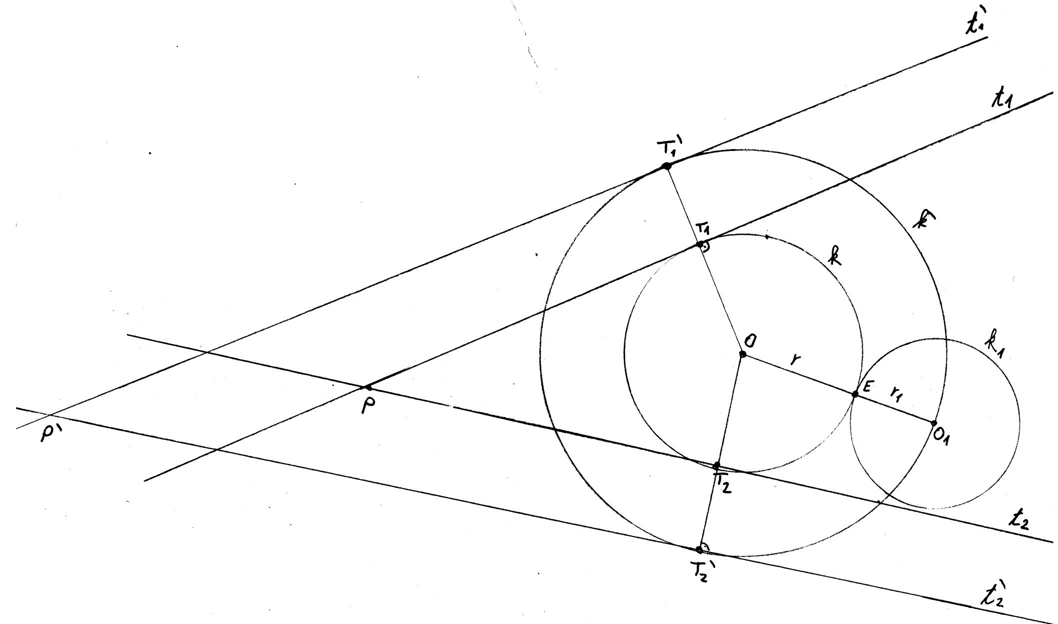


nema rješenja

8₀ Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



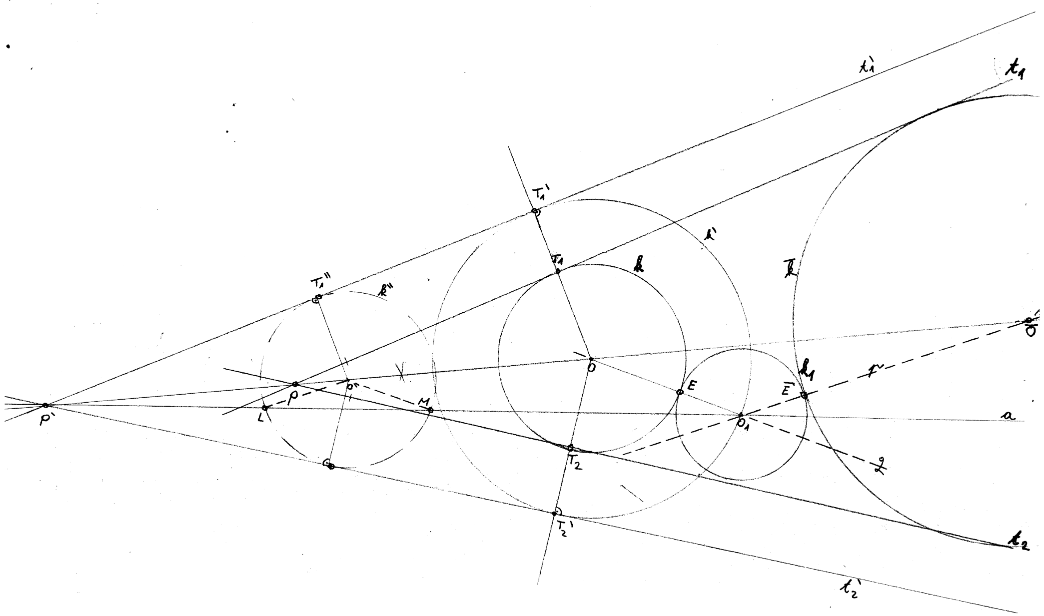
Neka tražena kružnica $k(O, r)$ dodiruje date prave t_1 i t_2 redom u tačkama T_1 i T_2, a datu kružnicu $k_1(O_1, r_1)$ u tački E. Kako je E tačka dodira dvije kružnice to su tačke O, E i O_1 kolinearne. Duž OT_1 produžimo do tačke T_1' za dužinu r_1 i duž OT_2 produžimo do tačke T_2' za dužinu r_1. Kružnica sa centrom u O poluprečnika $r+r_1$ će prolaziti kroz tačke O_1, T_1' i T_2'. Ovu kružnicu ćemo označiti sa k'. Prava t_1' takva da $t_1' \ni T_1'$ i $t_1' \perp p(O, T_1)$ je tangenta na kružnicu k' u dodirnoj tački T_1'. Slično, prava t_2': $t_2' \ni T_2'$ i $t_2' \perp p(O, T_2)$ je tangenta na kružnicu k' u dodirnoj tački T_2'.

Primjetimo da je $t_1' \parallel t_1$ i $t_2' \parallel t_2$ i da je udaljenost između njih dužina r_1. Ako možemo konstruisati kružnicu

k' onda možemo konstruisati i kružnicu k. Kako prave t_1' i t_2' možemo konstruisati to možemo konstruisati i kružnicu k' koja treba da dodiruje dvije prave t_1' i t_2' i prolazi kroz tačku O_1 (4 Apolonijev problem).

Konstrukcija

1. t_1, t_2, k_1
2. prave t_1' i t_2' takve da su paralelne sa t_1 i t_2 i udaljene od njih za dužinu r_1 (r_1 je poluprečnik date kružnice $k_1(O_1, r_1)$).
3. $t_1' \cap t_2' = \{P'\}$
4. s simetrala $\measuredangle t_1'P't_2'$
5. proizvoljna kružnica $k''(O'', O''T_1'')$ gdje je T_1'' ortogonalna projekcija tačke O'' na pravu t_1'
6. $a = p(P', O_1)$
7. $a \cap k'' = \{L, M\}$
8. prave p i q koje sadrže tačku O_1 a paralelne su sa $O''L$ i sa $O''M$
9. $s \cap p = \{\bar{O}\}$, $s \cap q = \{O\}$
10. $k(O, OO_1 - r_1)$
    $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}O_1 - r_1)$

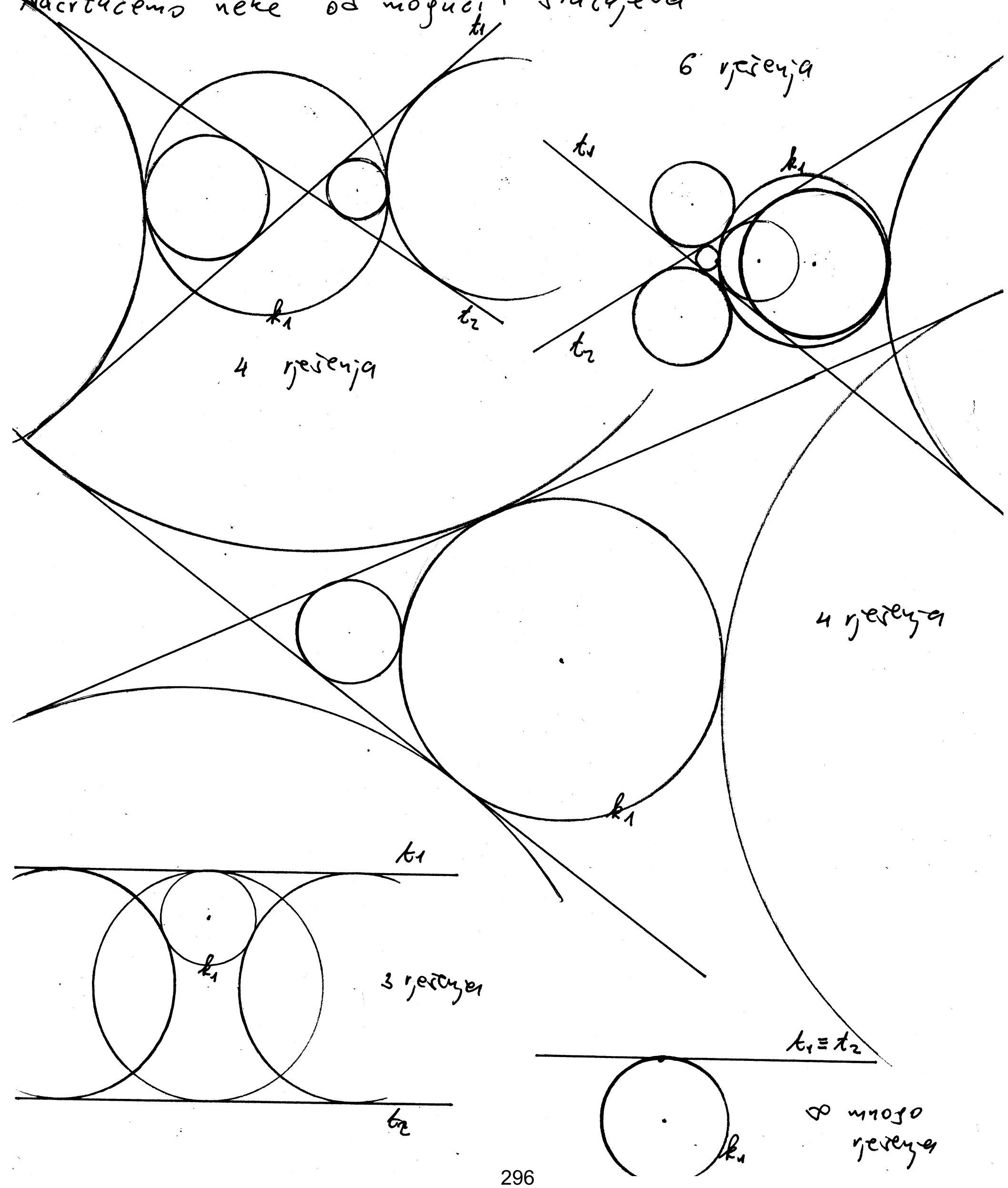


Dokaz

Da konstruisana kružnice k i $\bar{k}$ dodiruju kružnicu k_1 i da dodiruju prave t_1 i t_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

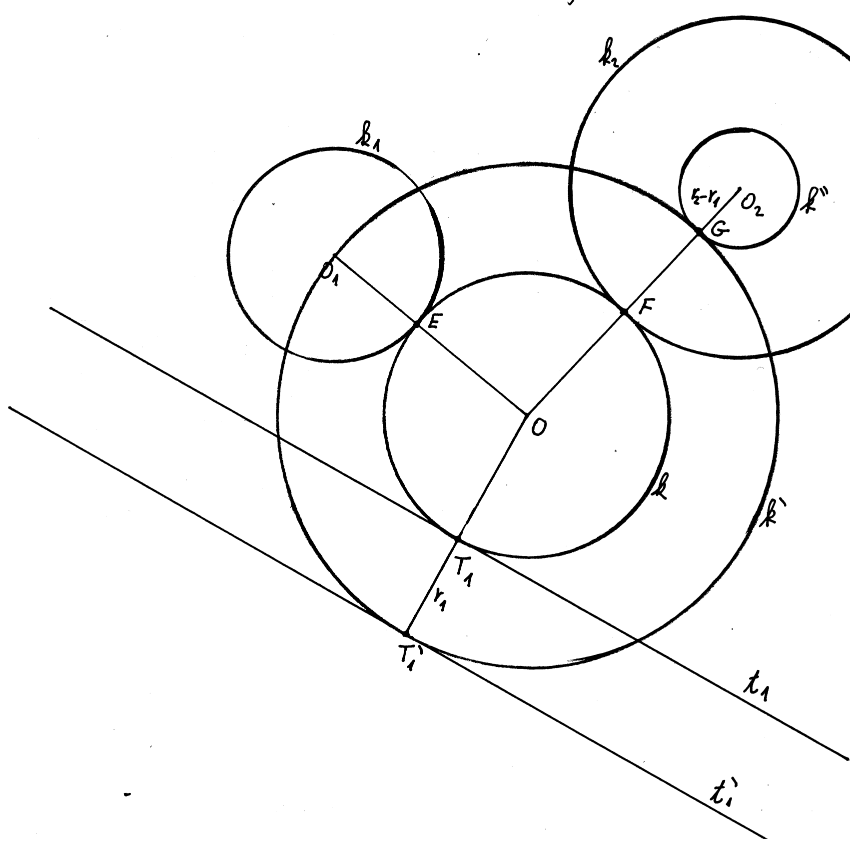
Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva



9. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



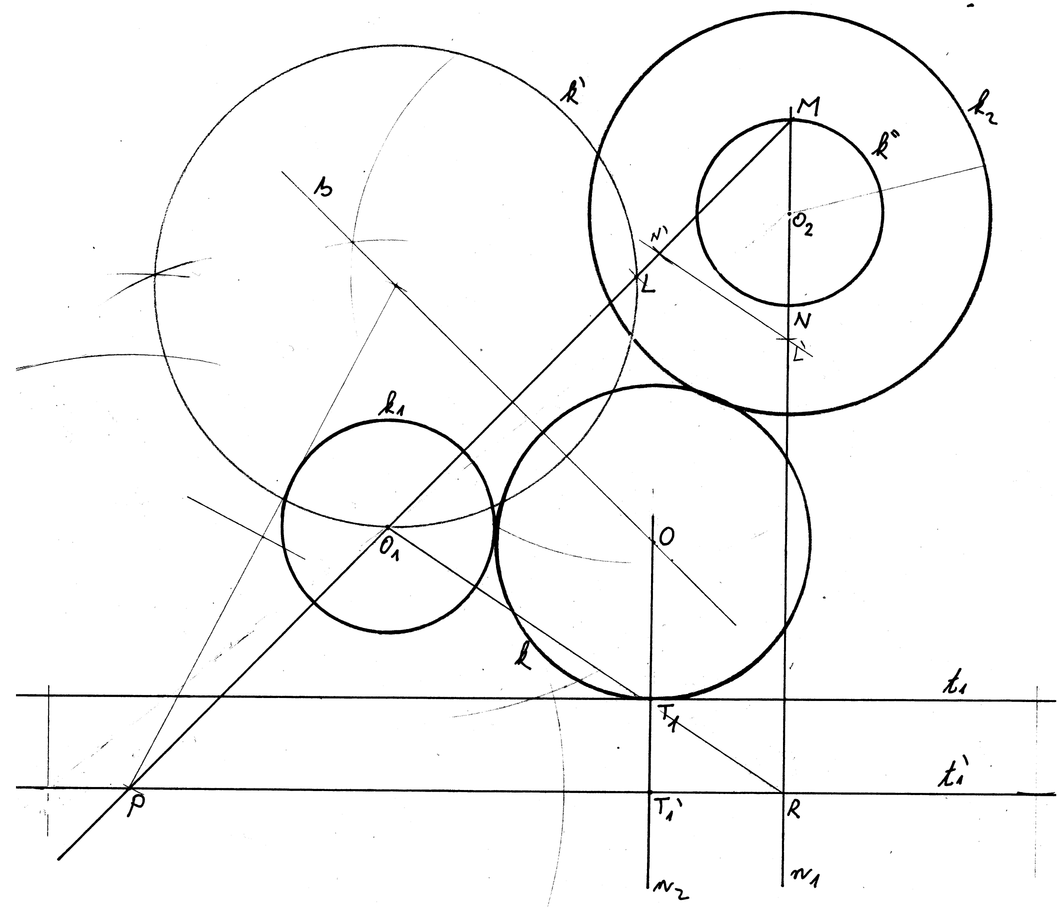
Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_2>r_1)$ redom u tačkama E i F a datu pravu t_1 u tački T_1. Primjetimo da su tačke O_1, E, O i O_2, F, O kolinearne. Posmatrajmo kružnicu $k'(O,r+r_1)$. Ova kružnica prolazi kroz tačku O_1, siječe duž O_2F u tački G i siječe $pp[O,T_1)$ u tački T_1' tako da je $O-T_1-T_1'$.

Označimo sa t_1' pravu takvu da je $t_1' \parallel t_1$, $t_1' \ni T_1'$ i prava t_1' je udaljena od prave t_1 za dužinu r_1, i sa $k''(O_2,r_2-r_1)$. Kružnicu k'' i pravu t_1' možemo konstruisati.

Kružnica k' prolazi kroz tačku O_1, dodiruje kružnicu k'' i pravu t_1' pa imamo 5. Apolonijev problem. Poslije konstrukcije kružnice k' nije teško konstruisati traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t_1, $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$
2. $k''(O_2,r_2-r_1)$
3. t_1' : $t_1' \parallel t_1$ i udaljenost između pravih t_1 i t_1' je r_1
4. n_1 : $n_1 \perp t_1'$
5. $n_1 \cap t_1' = \{R\}$, $n_1 \cap k'' = \{M,N\}$: $R-N-M$
6. $p(M,O_1) \cap t_1' = \{P\}$
7. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MO_1}$ $\left(\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MO_1}{MN}\right)$
8. $k(M,ML) \cap pp[M,O_1) = \{L\}$
9. s simetrala duži O_1L
10. $k'(O',O'O_1)$ gdje je $O' \in s$



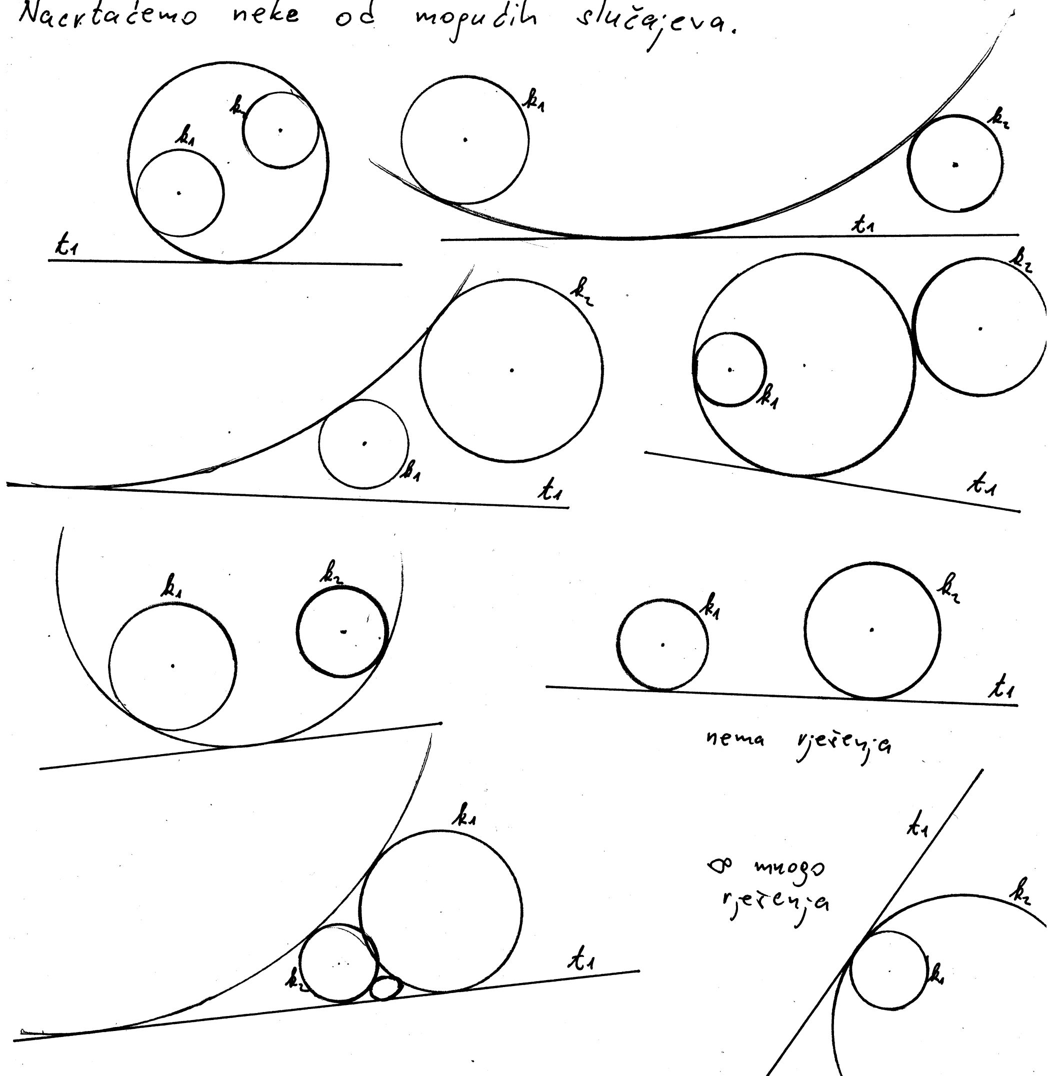
11. t' tangenta na kružnicu k'
12. $t' \cap k' = \{T'\}$
13. $k(P, PT'] \cap t_1' = \{T_1'\}$
14. $n_2 : n_2 \ni T_1'$ i $n_2 \perp t_1$
15. $n_2 \cap t_1 = \{T_1\}$, $n_2 \cap s = \{O\}$
16. $k(O, OT_1)$

Dokaz

Da konstruisana kružnica k dodiruje date kružnice k_1, k_2 i datu pravu t_1, slijedi iz analize i konstrukcije.

Diskusija

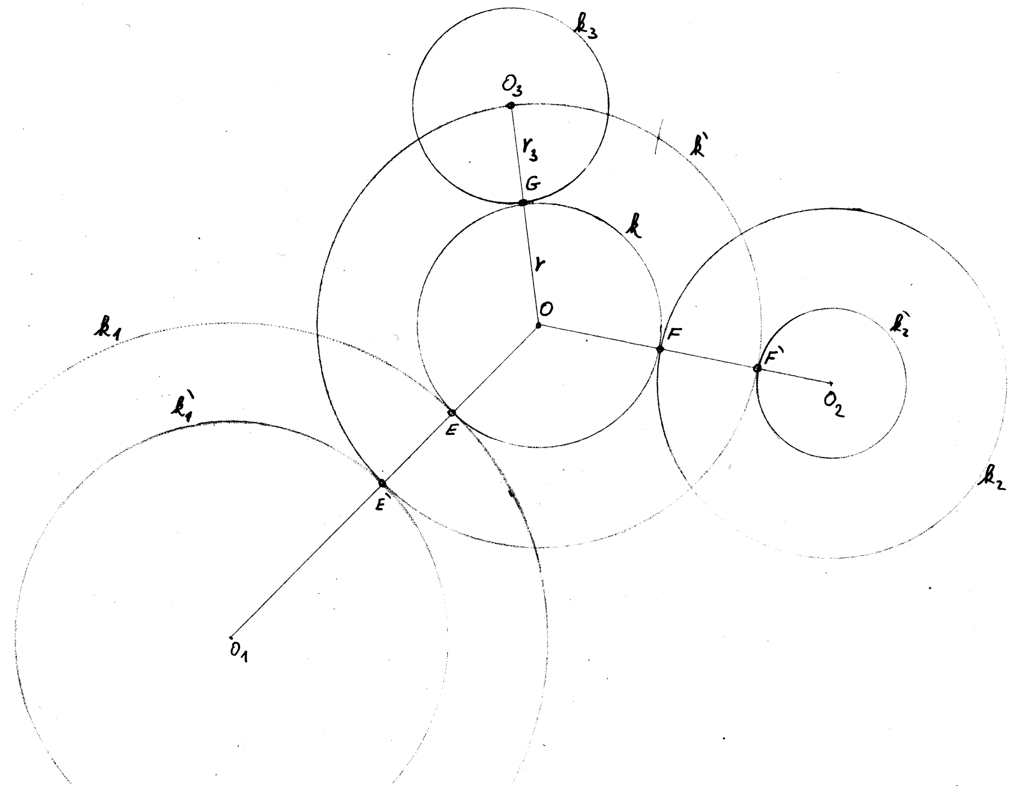
Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva.



(10.) Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date kružnice.

Analiza

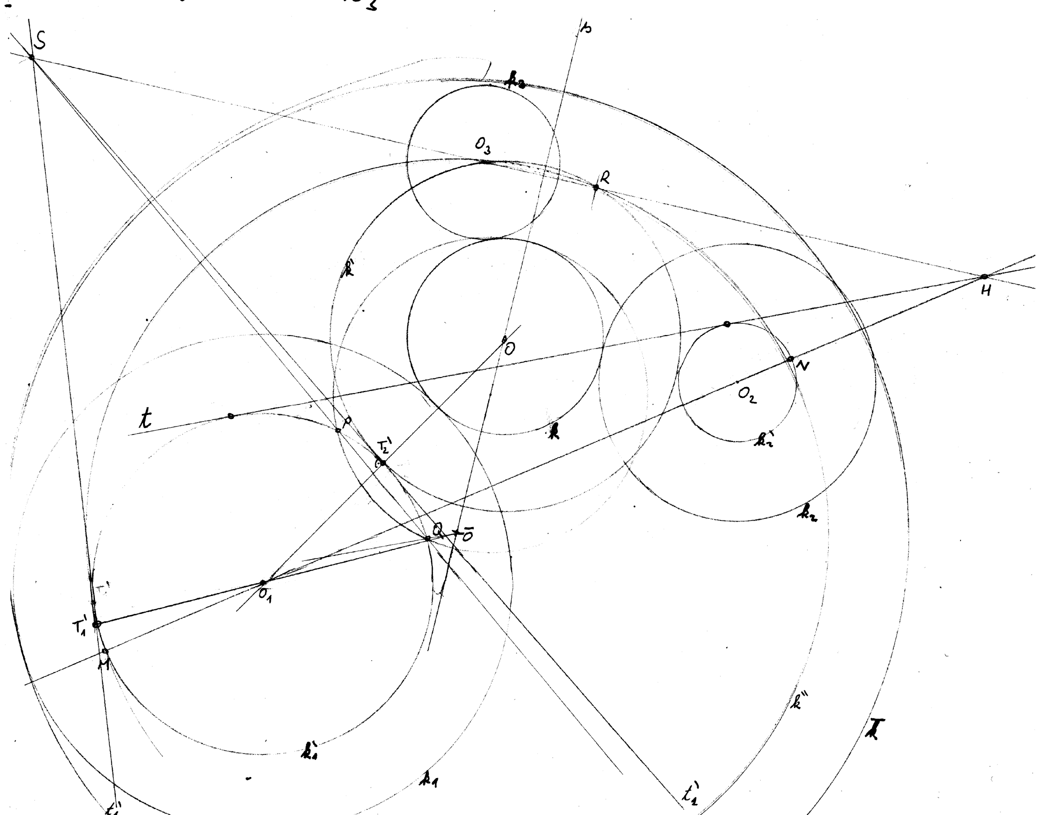
Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O, r)$ tražena kružnica koja dodiruje date kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ redom u tačkama E, F i G. Također pretpostavimo da je $r_3 < r_2 < r_1$. Primjetimo da je $O_1 - E - O$, $O_2 - F - O$ i $O_3 - G - O$. Posmatrajmo kružnicu $k'(O, r+r_3)$. Ova kružnica prolazi kroz tačku O_3 i siječe duži O_1O i O_2O redom u tačkama E' i F'. Ako sa k_1' i k_2' označimo redom kružnice $k_1'(O_1, r_1 - r_3)$ i $k_2'(O_2, r_2 - r_3)$ tada imamo da kružnica k' dodiruje kružnice k_1' i k_2', redom u tačkama E' i F'. Kako kružnice k_1' i k_2' možemo konstruisati i imamo tačku O_3 to nije teško konstruisati kružnicu k' (6. Apolonijev problem). Poslije kružnice k' traženu kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$
2. $k_1'(O_1, r_1 - r_3)$
3. $k_2'(O_2, r_2 - r_3)$
4. $p(O_1, O_2)$
5. presječne tačke M i N prave $p(O_1, O_2)$ s kružnicama k_1' i k_2'
   $k_1' \cap p(O_1, O_2) = \{M\}$
   $k_2' \cap p(O_1, O_2) = \{N\}$: $M - O_1 - O_2 - N$
6. zajedničku tangentu t kružnica k_1' i k_2'
7. $p(O_1, O_2) \cap t = \{H\}$, pravu $p(H, O_3)$
8. tačku R na pravoj $p(H, O_3)$ tako da je $HR = \frac{HM \cdot HN}{HO_3}$
9. simetralu s duži O_3R
10. kružnicu $k_3'(O_3', O_3'O_3)$,
    O_3' proizvoljna tačka prave s ali takva da kružnica k_3' siječe datu kružnicu k_1' u tačkama P i Q
11. $p(P, Q) \cap p(H, O_3) = \{S\}$
12. iz tačke S tangentu t_1' na kružnicu k_1'
13. $t_1' \cap k_1' = \{T_1'\}$, $k_1' \cap k(S, S$ … $= \{T_1', T_2'\}$
14. $s \cap p(O_1, T_1') = \{\bar{O}\}$
    $s \cap p(O_1, T_2') = \{O\}$
15. $k' = k(O, OT_2')$, $k'' = k(\bar{O}, \bar{O}T_1')$
16. $k(O, OO_1 - r)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}T_1' + r_3)$

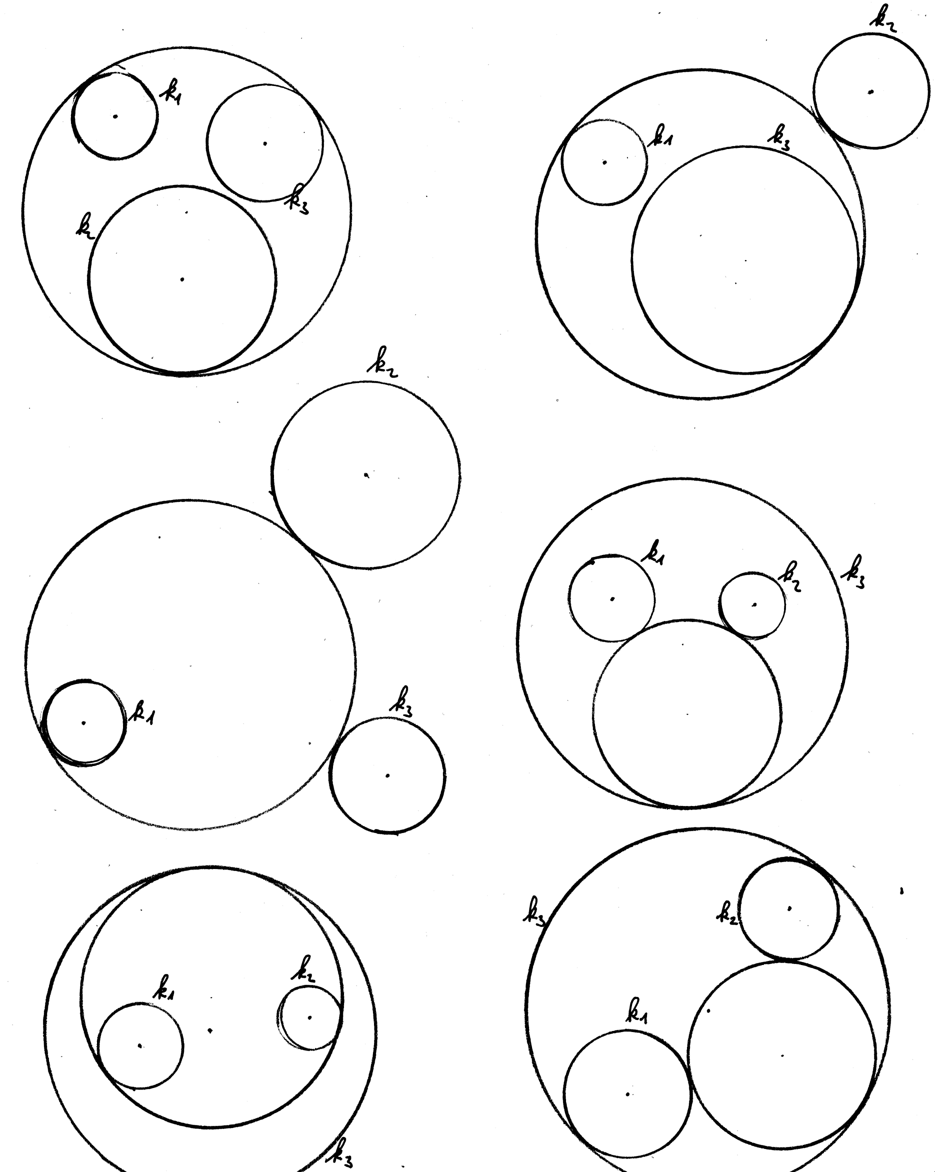


Dokaz

Da konstruisane kružnice k i $\bar{k}$ dodiruju date kružnice k_1, k_2 i k_3 slijedi iz analize i konstrukcije

Diskusija

Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva (ukupno ih ima 32).



Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primjetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove ΔPNS_1 i ΔPTS.

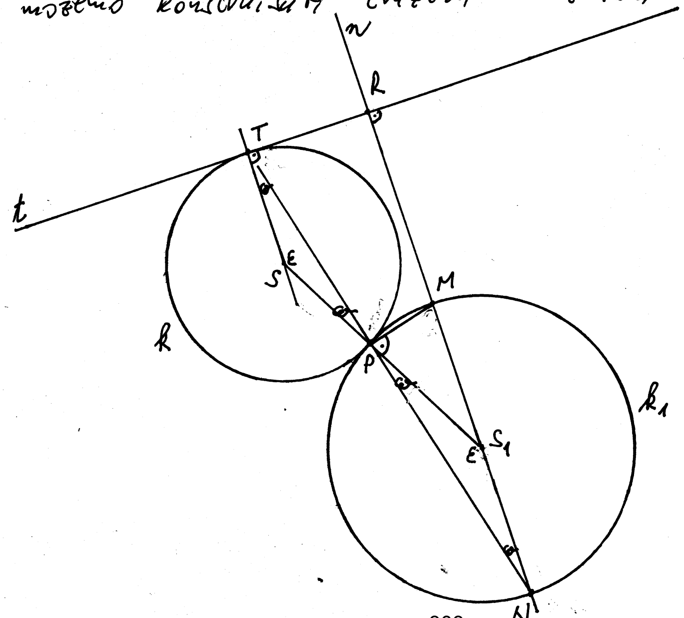
$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TSP \cong \measuredangle NS_1P = \varepsilon$

ΔSPT jkk $\Rightarrow \measuredangle STP \cong \measuredangle SPT = \omega$ i $\measuredangle S_1NP \cong \measuredangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\measuredangle SPT = \measuredangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\measuredangle SPT$ i $\measuredangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

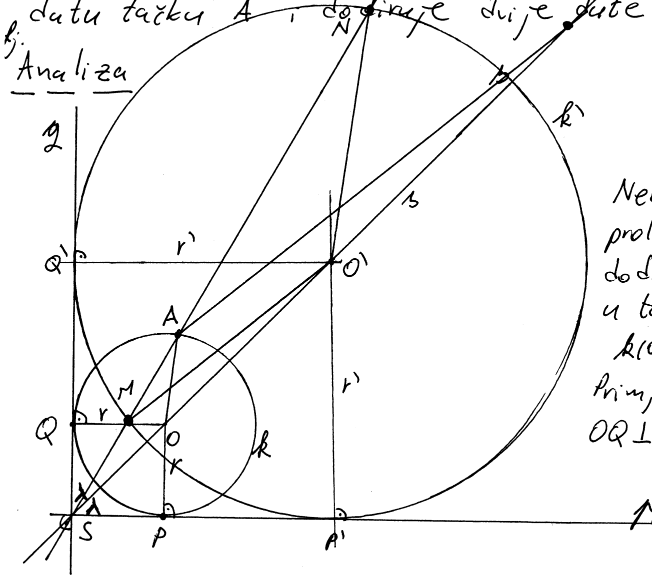
Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S,ST)$.



Date su prave p i g, $p \perp g$ i data je tačka A tako da $A \notin p$ i $A \notin g$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i g.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je k traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje prave p i g redom u tačkama P i Q.

$k(O,r)$

Primjetimo da je $OP \perp p$ i $OQ \perp g$. Kako je $p \perp g$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} OP \cong QS \\ OQ \cong PS \\ OS \cong OS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta POS \cong \Delta SOQ \Rightarrow \measuredangle PSO \cong \measuredangle OSQ = \lambda$$

Prema tome tačka O se nalazi na simetrali s ugla $\measuredangle pSg$.

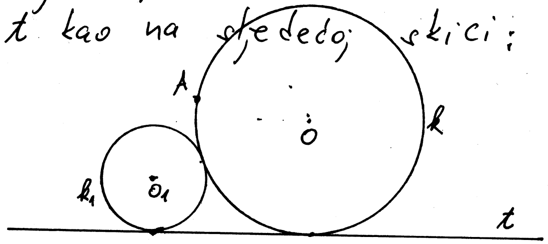
Neka je $k'(O',r')$ krug čiju smo tačku O' uzeli proizvoljno na pravoj s. Označimo sa M i N tačke presjeka $p(S,A)$ sa krugom k', a neka su P' i Q' ortogonalne projekcije tačke O' na prave p i g.

$$\left.\begin{array}{l} O'Q' \parallel OQ \overset{T_0T_0}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SQ'}{SQ} = \dfrac{r'}{r} \\ O'P' \parallel OP \overset{T_0T_0}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SP'}{SP} = \dfrac{r'}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ kružnica k' je dobijena iz kruga k homotetijom sa koeficijentom $\dfrac{r'}{r}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O'N \parallel OA$

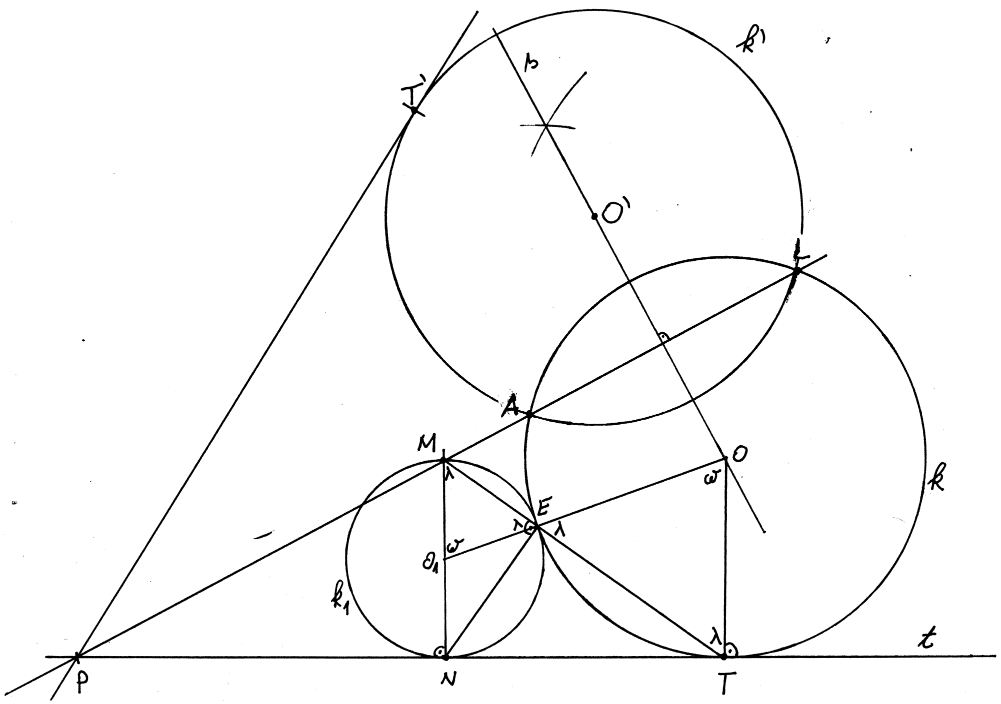
Kružnicu k sad možemo konstruisati.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krug k_1 i pravu t kao na sljedećoj skici:



<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak rješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug $k_1(O_1,r_1)$ u tački E i dodiruje datu pravu u tački T. Dalje, neka dati krug k_1 dodiruje pravu t u tački T. Kako je E dodirna tačka krugova primjetimo odmah da je $O_1 - E - O$. Primjetimo isto tako da je

$O_1N \perp t$ i $OT \perp t$ $\Rightarrow$ $p(O_1,N) \parallel p(O,T)$.

$p(O_1,N) \parallel p(O,T)$ i $p(O_1,O)$ transferzala $\Rightarrow$ $\measuredangle MO_1E = \measuredangle TOE = \omega$

$MO_1 \cong O_1E = r_1$ $\Rightarrow$ $\triangle MO_1E$ jkk sa osnovicom ME $\Rightarrow$

$(\{M,N\} = p(N,O_1) \cap k_1)$ $\Rightarrow$ $\measuredangle O_1ME = \measuredangle O_1EM = \lambda$

Isto tako $OE \cong OT = r$ $\Rightarrow$ $\triangle OET$ jkk sa osnovicom ET

$\Rightarrow$ $\measuredangle OET \cong \measuredangle OTE = \lambda$

$p(O_1,O)$ je prava koja sadrži dvije stranice ovog trougla i njihov vrh E, pa kako je $\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle OET = \lambda$ to je $M - E - T$.

Posmatrajmo trouglove $\triangle MNE$ i $\triangle MNT$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NEM \cong \measuredangle MNT = 90^\circ \\ \measuredangle EMN \cong \measuredangle TMN = \lambda \\ \measuredangle MNE \cong \measuredangle NTM \text{ (kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle MNE \sim \triangle MNT$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MN}{MT} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow MN^2 = ME \cdot MT \quad \ldots(1)$$

Posmatrajmo pravu $p(M,A)$

Neka je $\{A,L\} = p(M,A) \cap k$ i $\{P\} = p(M,A) \cap t$

Primjetimo (potencija tačke iz M) da je $ME \cdot MT = MA \cdot ML$ ...(2)

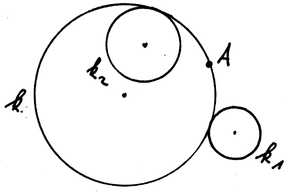
(1) i (2) $\Rightarrow$ $MA \cdot ML = MN^2$ $\Rightarrow$ $ML = \frac{MN^2}{MA}$

Kako možemo konstruisati tačke M, A i N to sad nije teško konstruisati i tačku L.

Neka je s simetrala duži AL i $O' \in s$ proizvoljna tačka na simetrali. Posmatrajmo krug $k'(O', r')$. Neka je $p(P,T')$ tangenta iz tačke P na krug k', $T' \in k'$. Primjetimo da je $(PT')^2 = PA \cdot PL$ i $PT^2 = PA \cdot PL$ $\Rightarrow$ $PT' \cong PT$.

Kako tačku T' možemo konstruisati to sad nije teško dobiti i tačku T, pa kako imamo A, L i T to traženi krug k nije teško konstruisati.

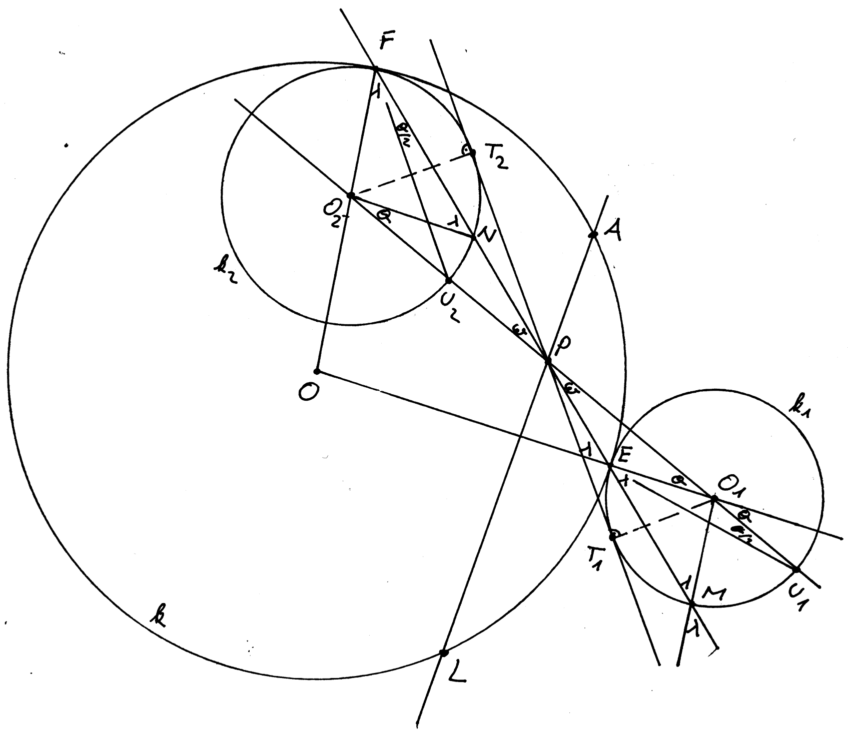
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.

Neka je $p(E,F)\cap k_2=\{F,N\}$ i $p(E,F)\cap k_1=\{E,M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2)\cap k_1=\{U_1\}$ i $p(O_1,O_2)\cap k_2=\{U_2\}$: $O_2-U_2-O_1-U_1$,

$$\{P\}=p(O_1,O_2)\cap p(E,F)$$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primjetimo da je poredak U_2-P-O_1 i $N-P-E$.

Trouglovi ΔO_1EM, ΔOEF i ΔO_2FN su jkk. pa imamo

$$\sphericalangle O_1EM \cong \sphericalangle O_1ME \cong \sphericalangle OEF \cong \sphericalangle OFN \cong \sphericalangle O_2FN \cong \sphericalangle O_2NF = \lambda$$

$$\Rightarrow p(O,O_1)\parallel p(O_2,N) \quad \text{i} \quad p(O_1,M)\parallel p(F,O)$$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$).

Označimo sa α ugao $\sphericalangle NO_2U_2$. To je centralni periferijski ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferijski ugao $\sphericalangle U_2FN=\frac{\alpha}{2}$.

Kako je $p(O_2,N)\parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\sphericalangle NO_2U_2 \cong \sphericalangle PO_1E=\alpha \Rightarrow \sphericalangle O_1U_1E=\frac{\alpha}{2}$.

Sad možemo pokazati da su ΔFU_2P i ΔU_1EP slični

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle U_1PE \cong \sphericalangle FPU_2=\omega \\ \sphericalangle PU_1E \cong \sphericalangle PFU_2=\frac{\alpha}{2} \\ \sphericalangle U_1EP \cong \sphericalangle FU_2P\end{array}\right\} \overset{\text{st. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta PU_1E \sim \Delta PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2}=\frac{PU_1}{PF} \Rightarrow PE\cdot PF = PU_1\cdot PU_2 \quad \ldots(1)$$

Neka je $p(P,A)\cap k=\{A,L\}$.

Možemo primjetiti $PA\cdot PL = PE\cdot PF \quad \ldots(2)$

(1) i $(2) \Rightarrow PU_1\cdot PU_2 = PA\cdot PL \Rightarrow PL=\frac{PU_1\cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primjetimo $\Delta PO_1E\sim\Delta PO_2N$ i $\Delta PO_1M\sim\Delta PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PE}{PN}=\frac{O_1E}{O_2N}=\frac{r_1}{r_2} \\ \frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PM}{PL}=\frac{O_1M}{O_2F}=\frac{r_1}{r_2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1.

Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

(20%) b) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(60%) c) Visina iz vrha A trougla $\triangle ABC$ presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

Zadatak br. 2

(40%) a) Dat je krug $k(I, r)$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

(60%) b) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao $\triangle MAB$, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A, B) \| c$.

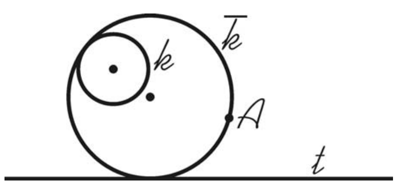
Zadatak br. 3

(20%) a) Za dva data kruga konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(20%) b) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

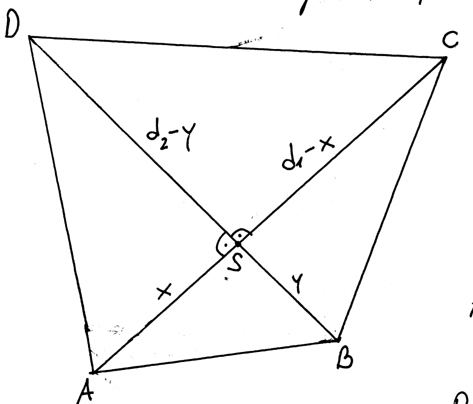
(60%) c)

Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



(#) Neka je □ABCD raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) izvesti formulu za površinu $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

Rj.



Tačku presjeka dijagonala označimo sa S, označimo sa x duž AS i sa y duž BS.

Tada je $CS=d_1-x$, $DS=d_2-y$

$P_{\Delta ABS}=\frac{x\cdot y}{2}$, $P_{\Delta BCS}=\frac{y\cdot(d_1-x)}{2}$

$P_{\Delta CDS}=\frac{(d_2-y)(d_1-x)}{2}$, $P_{\Delta ASD}=\frac{x\cdot(d_2-y)}{2}$

$$P_{□ABCD}=P_{\Delta ABS}+P_{\Delta BCS}+P_{\Delta CDS}+P_{\Delta ASD}=\frac{\cancel{xy}+yd_1-\cancel{xy}+d_1d_2\boxed{-d_2x}-d_1y+\cancel{xy}\boxed{+d_2x}\cancel{-xy}}{2}$$

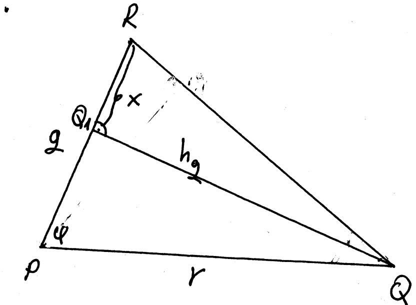
$$=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

tj. $P_{□ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$

q.e.d.

(#) Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $P=\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi$.

Rj.



Neka je $QQ_1=h_q$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_q}{r}\implies$$

$$h_q=r\sin\varphi \quad \dots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_q\cdot q}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(q-x)h_q}{2}+\frac{x\cdot h_q}{2}=\frac{q\cdot h_q}{2}$$

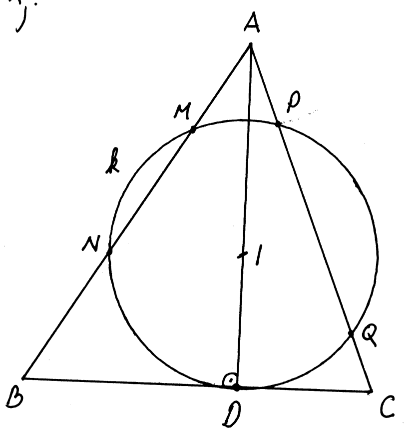
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_q\cdot q}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

(#) Visina iz vrha A trougla ΔABC presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM\cdot AN = AB(AM+AN)$.

Rj.



Kako krug k dodiruje stranicu BC u tački D to je njegov centar I na visini AD.

ΔABD pravougli

$$AD^2 = AB^2 - BD^2. \quad \dots(1)$$

Dalje iz potencije tačke B u odnosu na krug k imamo

$$BD^2 = BN\cdot BM \quad \dots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BN\cdot BM \\ &= AB^2 - (AB-AN)(AB-AM) \\ &= \cancel{AB^2} - \cancel{AB^2} + AB\cdot AM + AB\, AN - AM\, AN \end{aligned}$$

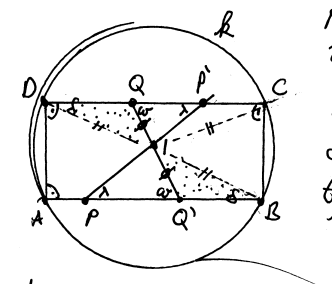
$$AD^2 + AM\cdot AN = AB(AM+AN)$$

q.e.d.

(#) Dat je krug k i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije dvije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama, kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi pravougaonik, gdje su tačke P i Q date tačke koje pripadaju stranicama pravougaonika.



Kako je ugao nad prečnikom prav to su dijagonale pravougaonika ujedno i prečnici od k tj. $AC \wedge BD = \{I\}$

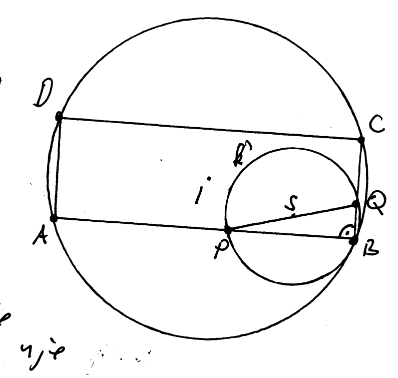
I slučaj:

Tačke P i Q pripadaju suprotnim stranicama, recimo $P\in AB$, $Q\in CD$. Neka je $p(P,I)\wedge CD=\{P'\}$ i $p(Q,I)\wedge AB=\{Q'\}$. Postavljamo pitanje: Da li je $\Delta PQ'I \cong \Delta IP'Q$? Da, ova dva trougla su podudarna
ZA VJEŽBU OVO RASPISATI
(na osnovu UUS $\Rightarrow \Delta Q'BI \cong \Delta QDI \Rightarrow$ na osn. UUS $\Rightarrow \Delta PQ'I \cong \Delta P'QI$)

Sad kako možemo konstruisati tačke P' i Q' time možemo konstruisati i prave $p(P,Q')$, $p(Q,P')$ a time i traženi pravougaonik.

II slučaj

Tačke P i Q pripadaju susjednim stranicama, recimo $P\in AB$, $Q\in BC$. Kako je $\measuredangle ABC = 90^\circ$ To je i $\measuredangle PBQ = 90^\circ \Rightarrow \Delta PBQ$ je pravougli. $\Rightarrow$ centar S kruga opisanog oko ΔPBQ se nalazi na sredini PQ.

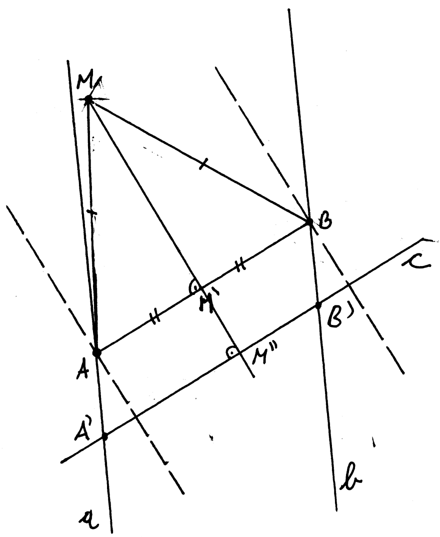


Kako su P i Q dvije date tačke, to nije teško konstruisati tačku B a poslije nje i pravougaonik ABCD.

Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao ΔMAB, sa osnovicom AB, tako da $A\in a$, $B\in b$ i $p(A,B)\parallel c$.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABM traženi jednakokraki trougao takav da $A\in a$, $B\in b$, $a\parallel b$, $p(A,B)\parallel c$, $c\nparallel a$, $c\nparallel b$, M tačka između pravih a i b.



Ako iz vrha M spustimo visinu MM' na osnovicu AB nije teško pokazati da je $AM'\cong BM'$ tj. da je M' središte AB (ovo možemo zaključiti iz $\Delta AM'M\cong\Delta BM'M$ gdje podudarnost trouglova slijedi iz SSU).

Dalje uvedimo oznake $c\cap a=\{A'\}$; $c\cap b=\{B'\}$, $p(M,M')\cap c=\{M''\}$.

Primjetimo da je $\square A'B'BA$ paralelogram (ZAŠTO?), pa je

$$AB\cong A'B'$$

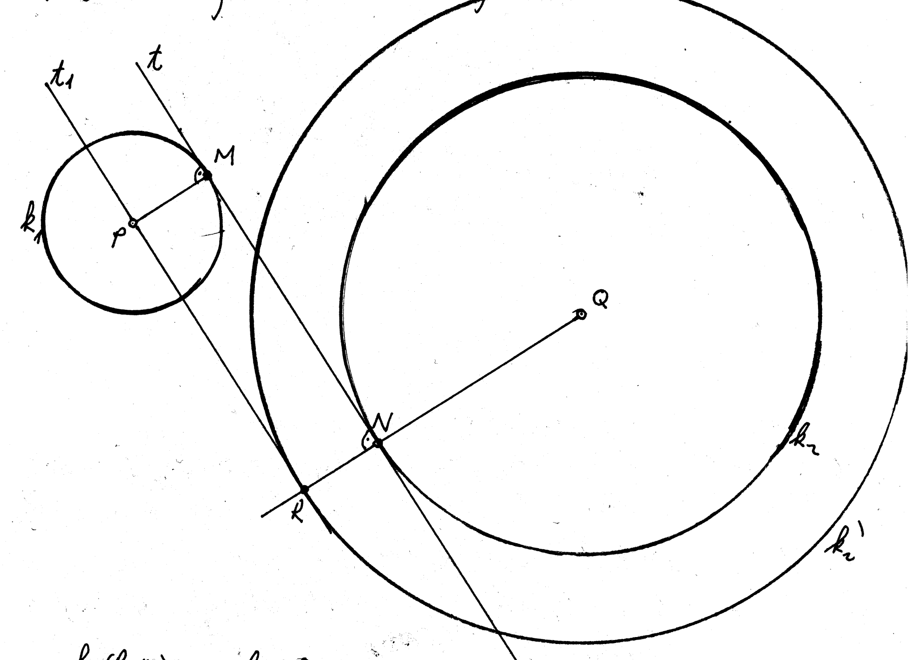
$\Rightarrow$ poznata nam je dužina od $\frac{1}{2}AB$.

Kako nam je data tačka M i prava c to tačku M'' možemo konstruisati ($\measuredangle MM''c=90^\circ$). Kako se tačke A i B nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}AB$ od prave $p(M,M'')$, a poznate su nam prave a i b, to tačke A i B nije teško konstruisati, a poslije njih i ΔABM.

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P,r_1)$ i $k_2(Q,r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM\perp t$ i $QN\perp t$ $\Rightarrow$ $p(P,M)\parallel p(Q,N)$

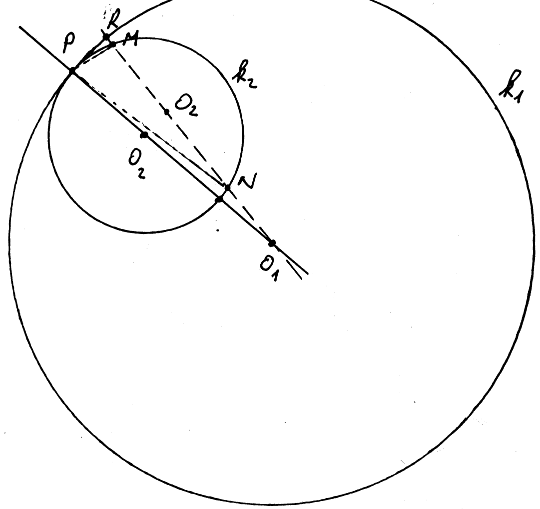
Neka je $t_1\parallel t$, $P\in t_1$ i $t_1\cap p(Q,N)=\{R\}$: $Q-N-R$.

$QR=QN+NR=r_2+r_1$. Označimo sa $k_2'(Q,QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P). Kako je $PM=NR$, $N\in t$ i $t_1\parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak O_1-N-O_2-M. Neka je R tačka na k_1 t.d. $N-M-R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\measuredangle MPN = 90°$. Kako je $\measuredangle MPO_1 > \measuredangle MPN \Rightarrow \measuredangle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

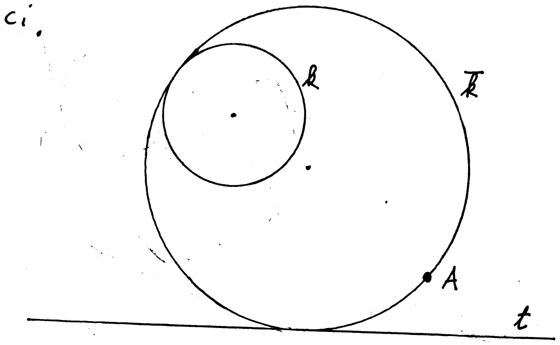
kontradikcija

(PO_1 i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je O_1-M-R to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

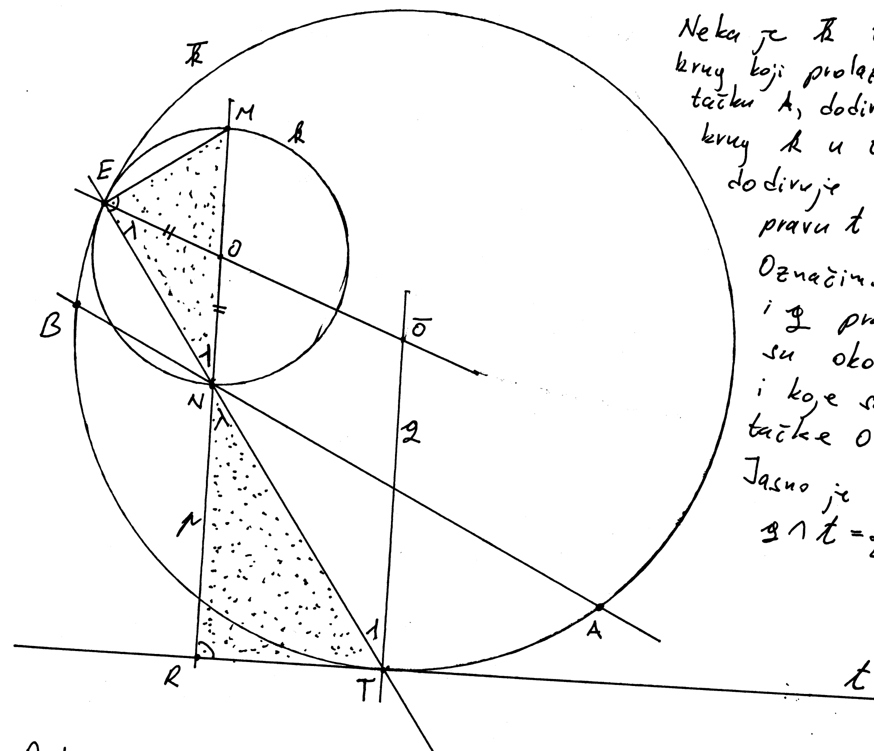
q.e.d.

Dat je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$; $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$

Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo).

Posmatrajmo sad trouglove $\triangle EON$ i $\triangle E\bar{O}T$.

Trougao $\triangle E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako $\triangle EON$ je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo $\triangle RTN$ i $\triangle ENM$. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\text{(slič. UUU)} \Longrightarrow \triangle RTN \sim \triangle ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots(1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap k = \{A,B\}$ t. d. $B-N-A$. Ako posmatramo krug k imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots(3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoću krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.
Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 24.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$, i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da je $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$.

(20%) b) Raznostraničan trougao $\triangle ABC$, ima dužine stranica a, b i c. Neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \frac{ac}{a+b}$.

(60%) c) Neka je $\triangle ABC$ raznostraničan trougao i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da $P_{\triangle AEG} = P_{\triangle ABC} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

Zadatak br. 2

(30%) a) Kroz tačku C pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisati pravu koja će trougao podijeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

(70%) b) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj dati krug odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

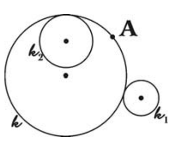
Zadatak br. 3

(20%) a) Konstruisati luk kruga (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(20%) Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dva podudarna kruga sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(60%) c)

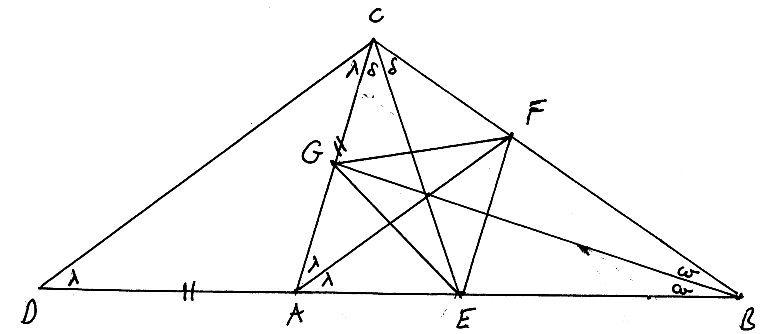
Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



(#) Dat je raznostraničan ΔABC, i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}.$$

Rj.



U ovom zadatku se u stvari traži da pokažemo da simetrala AF unutrašnjeg ugla $\sphericalangle BAC$ ΔABC dijeli stranicu BC u omjeru druge dvije stranice.

Izaberimo tačku $D \in p(B,A)$ t.d. $B-A-D$ i $AD \cong AC$

ΔACD jkk $\Rightarrow \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA = \lambda$

$\sphericalangle CAB$ je vanjski ugao $\Delta ADC \Rightarrow \sphericalangle CAB = 2\lambda$

AF simetrala $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAF \cong \sphericalangle CAF = \lambda$

$\sphericalangle BAF \cong \sphericalangle BDC = \lambda$ na pravoj $p(B,D) \Rightarrow p(A,F) \parallel p(D,C)$

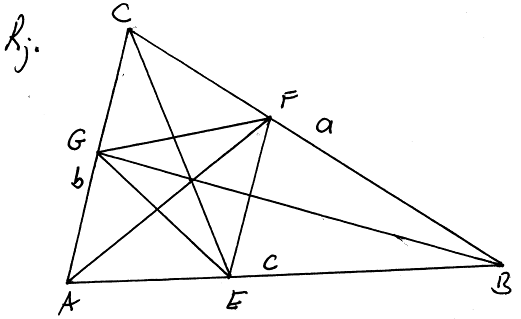
$$p(A,F) \parallel p(D,C) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{BA}{AD} = \frac{BF}{FC}$$

$$\xRightarrow{AD \cong AC} \frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

Raznostraničan trougao ΔABC ima dužine stranica a, b i c. Neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \frac{ac}{a+b}$.

Rj.



CE simetrala $\measuredangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}, \quad AC = b, \quad BC = a,$$

$BE = c - AE$ pa imamo

$$\frac{AE}{c-AE} = \frac{b}{a} \Rightarrow AE = \frac{b}{a}(c - AE)$$

$$AE + \frac{b}{a} AE = \frac{bc}{a}$$

$$AE\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{bc}{a}$$

$$AE = \frac{bc}{a+b}$$

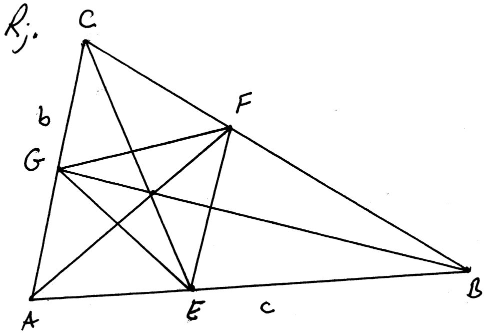
$$BE = c - AE = c - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a+b) - bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$$

q.e.d.

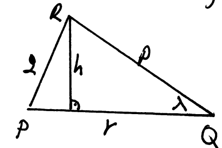
Neka je ΔABC raznostraničan trougao i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$P_{\Delta AEG} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+c)(a+b)}.$$

Rj.



Od ranije znamo da za proizvoljan ΔPQR gdje je $\measuredangle PQR = \lambda$ vrijedi



$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot p}{2} \sin\lambda$$

Ovu formulu nije teško izvesti

$$\sin\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow h = p \sin\lambda$$

$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r \cdot p}{2} \sin\lambda$$

$$P_{\Delta AEG} = \frac{AE \cdot AG}{2} \sin\alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin\alpha = \frac{b \cdot c}{2} \sin\alpha$$

Simetrala unutrašnjeg ugla u Δ dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije pa imamo

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{c-AE} = \frac{b}{c} \Rightarrow \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \Rightarrow AE = \frac{bc}{a+b}$$

Slično

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AG}{b-AG} = \frac{c}{a} \Rightarrow \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \Rightarrow AG = \frac{bc}{a+c}$$

Prema tome

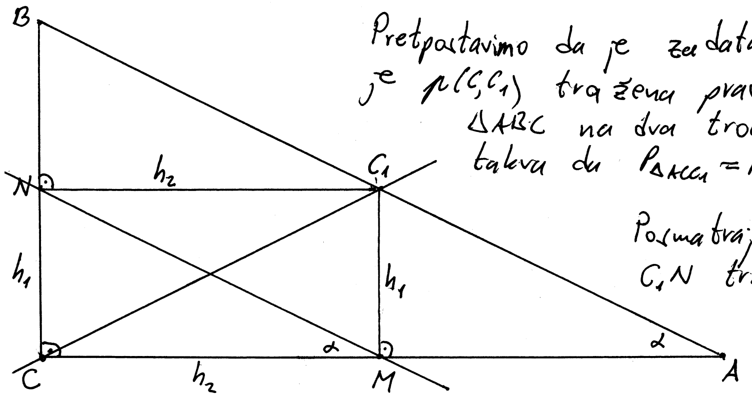
$$P_{\Delta AEG} = \frac{1}{2} AE \cdot AG \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \frac{bc}{(a+b)} \cdot \frac{bc}{(a+c)} \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin\alpha \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

q.e.d.

(#) Kroz tačku C pravouglog trougla ΔABC konstruisati pravu koja će trougao podijeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

R: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(C,C_1)$ tražena prava koja dijeli trougao ΔABC na dva trougla ΔCAC_1 i ΔCC_1B takvu da $P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B}$.

Posmatrajmo visine C_1M i C_1N trouglova ΔACC_1 i ΔCC_1B. Uvedimo oznake $AC=b$, $BC=a$, $C_1M=h_1$ i $C_1N=h_2$.

$$P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B} \Rightarrow \frac{h_1 \cdot b}{2} = \frac{h_2 \cdot a}{2} \Rightarrow h_1 b = h_2 a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\xRightarrow{MC \cong NC_1 = h_2,\ CN \cong MC_1 = h_1} \frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} \Rightarrow \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \xRightarrow{O.T.T.} p(M,N) \parallel p(A,B)$$

$p(M,N) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CMN \cong \measuredangle CAB = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAC_1 \cong \measuredangle CMN = \alpha \\ \measuredangle AMC_1 \cong \measuredangle MCN = 90^\circ \\ MC_1 \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AMC_1 \cong \Delta MCN$$

$$\Downarrow$$

$$CM \cong MA$$

$\Rightarrow NC_1$ srednja linija ΔABC i M sredina AC

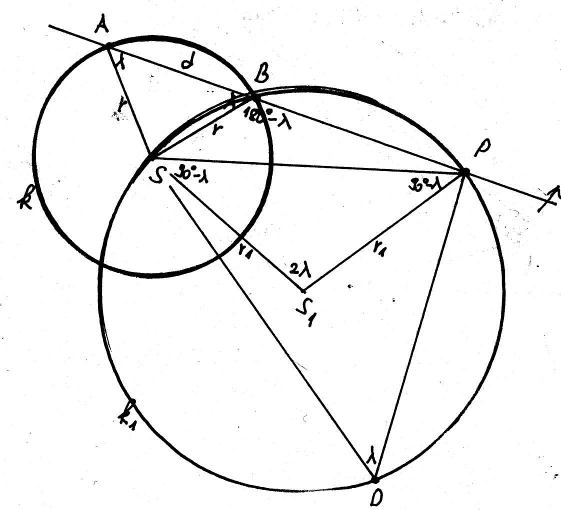
$\Rightarrow C_1$ sredina hipotenuze AB

Kako je lagano pronaći sredinu C_1 hipotenuze AB to pravu $p(C,C_1)$ nije teško konstruisati.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsijeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsijeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\measuredangle SAB \cong \measuredangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \measuredangle PBS = 180^\circ - \lambda$

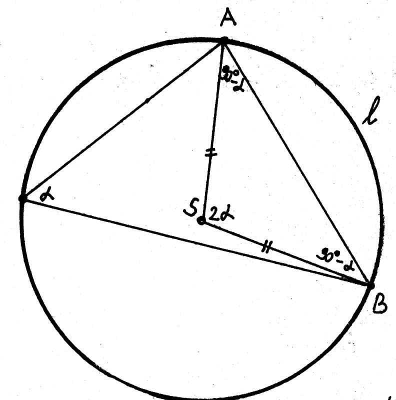
Ako je $k_1(S_1,r_1)$ kružnica opisana oko ΔSPB tada proizvoljan oštri periferijski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\measuredangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle PSS_1 \cong \measuredangle S_1PS = 90^\circ - \lambda$.

U trouglu ΔASB su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



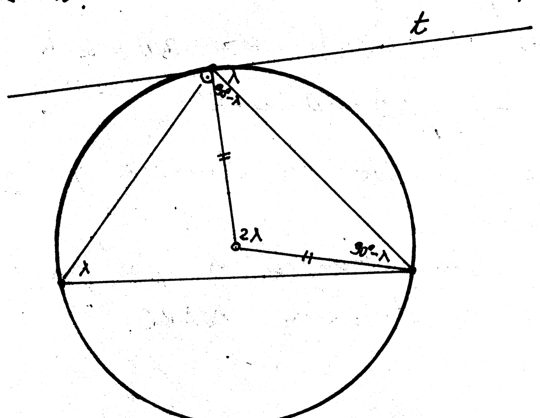
Neka su date tačke A i B, kružnica $k(S,SA)$ koja sadrži tačke A i B takva da su periferiski uglovi nad l (l je kružni luk čije su krajne tačke A i B) jednaki datom uglu α.

Primjetimo da je $\measuredangle BSA = 2\alpha$.

Kako je ΔASB jkk sa osnovicom AB imamo da je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 90° - \alpha$.

Prema tome ΔASB možemo konstruisati pa time i kružni luk l.

Primjedba:



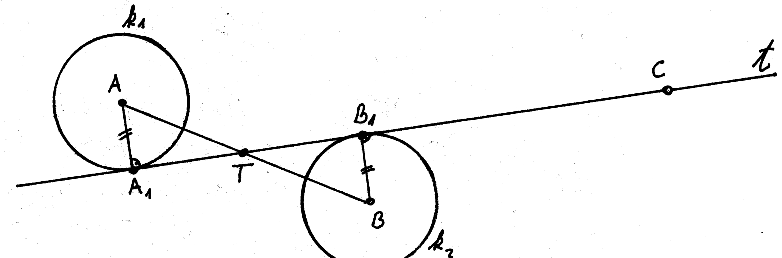
Primjetite da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Prema tome luk kruga možemo konstruisati i na drugi način.

Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



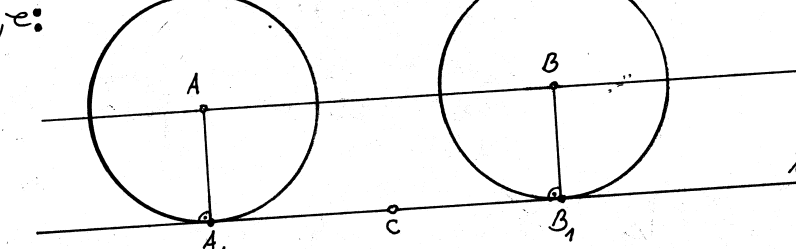
Neka su date tri nekolinearne tačke A, B i C i dvije podudarne kružnice (kružnice koje imaju podudaran poluprečnik) k_1 i k_2 koje imaju zajedničku tangentu t u tačkama A_1 i B_1 i $C \in t$. Neka je $\{T\} = AB \cap t$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ATA_1 \cong \measuredangle BTB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle AA_1T \cong \measuredangle BB_1T = 90° \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \Delta AA_1T \cong \Delta BB_1T \\ \Downarrow \\ AT \cong BT \end{array}$$

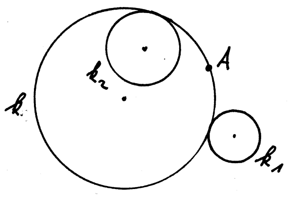
Kako $T \in t$ pravu t možemo konstruisati.

Kako su $AA_1 \perp t$ i $BB_1 \perp t$ kružnice k_1 i k_2 možemo konstruisati.

II rješenje:



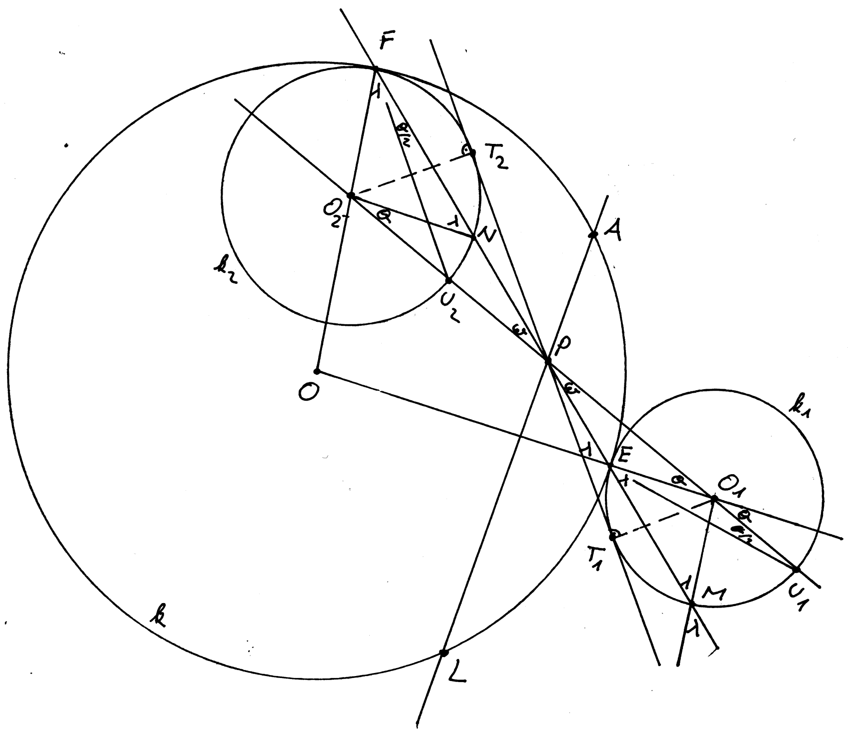
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.

Neka je $p(E,F)\cap k_2=\{F,N\}$ i $p(E,F)\cap k_1=\{E,M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2)\cap k_1=\{U_1\}$ i $p(O_1,O_2)\cap k_2=\{U_2\}$: $O_2-U_2-O_1-U_1$,

$\{P\}=p(O_1,O_2)\cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primjetimo da je poredak U_2-P-O_1 i $N-P-E$.

Trouglovi $\triangle O_1EM$, $\triangle OEF$ i $\triangle O_2FN$ su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle O_1ME \cong \measuredangle OEF \cong \measuredangle OFN \cong \measuredangle O_2FN \cong \measuredangle O_2NF = \lambda$$

$\Rightarrow p(O,O_1)\parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M)\parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa α ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferni ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferni ugao $\measuredangle U_2FN=\frac{\alpha}{2}$.

Kako je $p(O_2,N)\parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2 \cong \measuredangle PO_1E=\alpha \Rightarrow \measuredangle O_1U_1E=\frac{\alpha}{2}$.

Sad možemo pokazati da su $\triangle FU_2P$ i $\triangle U_1EP$ slični

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle U_1PE\cong\measuredangle FPU_2=\omega\\ \measuredangle PU_1E\cong\measuredangle PFU_2=\frac{\alpha}{2}\\ \measuredangle U_1EP\cong\measuredangle FU_2P\end{array}\right\} \overset{\text{st. UUU}}{\Longrightarrow} \triangle PU_1E\sim\triangle PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2}=\frac{PU_1}{PF} \Rightarrow PE\cdot PF=PU_1\cdot PU_2 \quad ...(1)$$

Neka je $p(P,A)\cap k=\{A,L\}$.

Možemo primjetiti $PA\cdot PL=PE\cdot PF$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow PU_1\cdot PU_2=PA\cdot PL \Rightarrow PL=\frac{PU_1\cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primjetimo $\triangle PO_1E\sim\triangle PO_2N$ i $\triangle PO_1M\sim\triangle PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PE}{PN}=\frac{O_1E}{O_2N}=\frac{r_1}{r_2}\\ \frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PM}{PL}=\frac{O_1M}{O_2F}=\frac{r_1}{r_2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$.

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(20%) b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

(60%) c) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Zadatak br. 2

(40%) a) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

(60%) b) Dat je $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD + EB = DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Zadatak br. 3

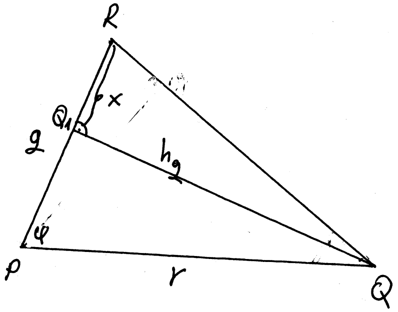
(20%) a) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

(20%) b) Dat je krug i u njegovoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u taj krug pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(60%) c) Dati je krug $k_1(S_1, r_1)$, prava t i tačka $T \in t$. Konstruisati krug $k(S, r)$ koji dodiruje krug k i koji dodiruje pravu t u tački T. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

\# Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $P=\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi$.

Rj.



Neka je $QQ_1=h_q$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_q}{r} \Rightarrow$$

$$h_q = r\sin\varphi \quad \ldots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_q\cdot q}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(q-x)\,h_q}{2}+\frac{x\cdot h_q}{2}=\frac{q\cdot h_q}{2}$$

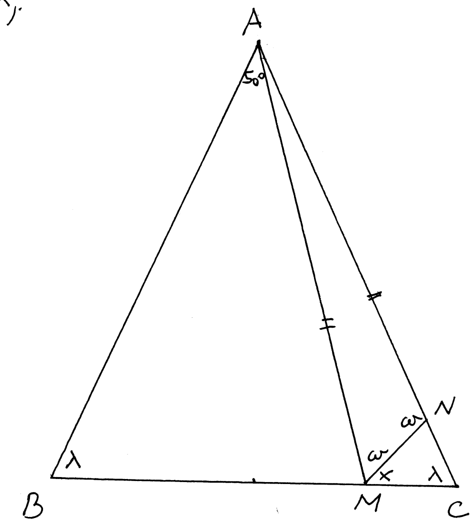
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_q\cdot q}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

\# Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC>50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM=50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM\cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x+\lambda \quad \ldots(1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50°+\lambda=\omega+x \quad \ldots(2)$$

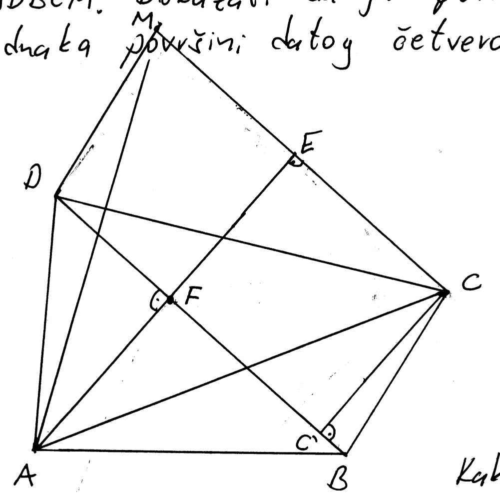
$(1)+(2)$: $\quad \omega+50°+\lambda = x+\lambda+\omega+x$

$$2x=50°$$

$$x=25°$$

\# Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Rj.



Neka je AE visina trougla $\triangle ACM$. Tada

$$P_{\triangle ACM} = \frac{AE \cdot CM}{2} \quad \dots (*)$$

Označimo sa F presječnu tačku od BD i AE. Kako je $BD \parallel MC$ i $AE \perp MC$ to je $AE \perp BD \Rightarrow AF$ visina $\triangle ABD$.

$$P_{\triangle ABD} = \frac{AF \cdot BD}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} \quad \dots (**)$$

Posmatrajmo $\triangle BCD$, i visinu CC' iz vrha C na stranicu BD. Imamo $CC' \parallel EF$ i $CE \parallel C'F \Rightarrow \square C'CEF$ paralelogram

$$\Rightarrow CC' \cong EF \Rightarrow P_{\triangle BCD} = \frac{CC' \cdot BD}{2} = \frac{EF \cdot MC}{2} \quad \dots (***)$$

Prema tome

$$P_{\triangle ABC} \overset{(*)}{=} \frac{AE \cdot MC}{2} = \frac{(AF+FE)\cdot MC}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} + \frac{FE \cdot MC}{2}$$

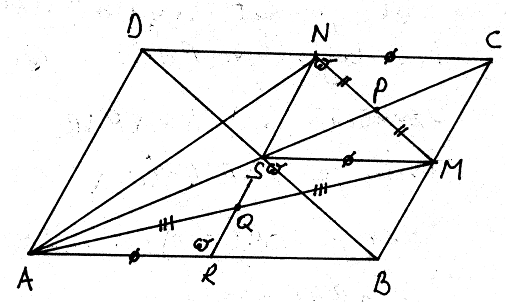
$$\overset{(**)\ i\ (***)}{=} P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = P_{\square ABCD}$$

q.e.d.

\# Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD. Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina $CD \overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow} SN$ sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina $BC \overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow} SM$ sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow P$ sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad $\left.\begin{aligned} &\measuredangle ASR \cong \measuredangle NSC \\ &\measuredangle ARS \cong \measuredangle SNC = \omega \\ &AS \cong SC \end{aligned}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Downarrow AR \cong CN \dots (*)$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada $\left.\begin{aligned} &\measuredangle AQR \cong \measuredangle SQM \\ &\measuredangle QRA \cong \measuredangle QSM = \omega \\ &AR \cong SM \end{aligned}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Downarrow AQ \cong QM \dots (**)$

Na osnovu $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow S$ težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

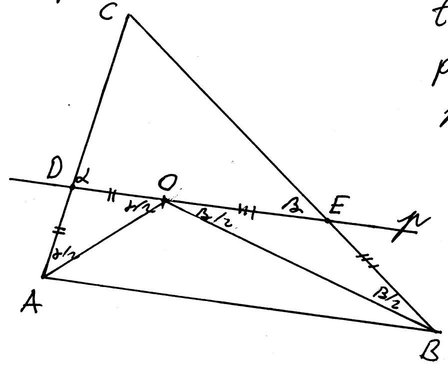
(#) Dat je ΔABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati trougao, i neka je p tražena prava takva da $D, E \in p$, $p \parallel AB$, $p \cap AC = \{D\}$, $p \cap \{B, C\} = \{E\}$ i

$$AD + BE = DE.$$



Na duži DE izaberimo tačku O takvu da $AD \cong DO$. i Kako je $AD+BE=DE$ to je $OE \cong BE$.

$p \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDC = \alpha$.

$p \parallel AB$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEC = \beta$.

$\measuredangle EDC = \alpha$ je vanjski ugao jednakokrakog $\Delta AOD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle AOD \cong \measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $\measuredangle DEC = \beta$ je vanjski ugao jkk $\Delta OBE \Rightarrow$

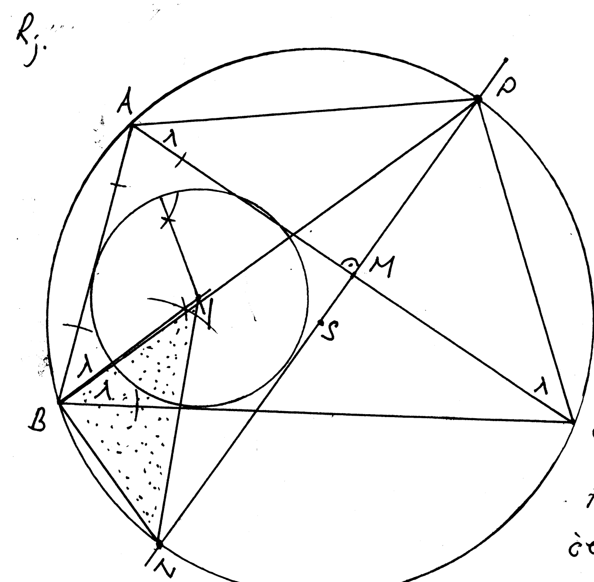
$\Rightarrow \measuredangle OBE \cong \measuredangle BOE = \frac{\beta}{2}$.

$$\measuredangle OAB = \alpha/2 \quad i \quad \measuredangle OBA = \beta/2$$

Kako je dat ΔABC to su dati i uglovi α i β pa tačku O nije teško konstruisati. Kako $O \in p$ i $p \parallel AB$ to nije teško konstruisati i pravu p.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je ΔBNI pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove ΔAMP i ΔPMC. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\measuredangle AMP \cong \measuredangle CMP = 90^\circ$
(S-M-P i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow}$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AMP \cong \Delta CMP$

$\Downarrow$

$\measuredangle PAM \cong \measuredangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\measuredangle ABP \cong \measuredangle PCA = \lambda$;

$\measuredangle PBC \cong \measuredangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $p[B,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ABC$ i tačka $I \in BP$.

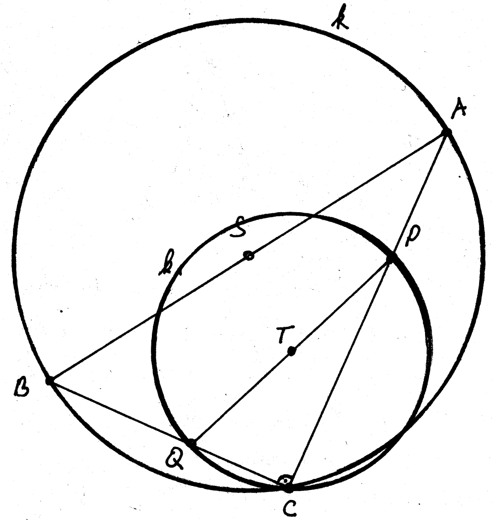
Ugao nad prečnikom je prav pa $\measuredangle NBP = 90^\circ$ i $\measuredangle NBI = 90^\circ \Rightarrow \Delta NBI$ je pravougli

q.e.d.

Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli ΔABC sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetino da je $\sphericalangle BCA$ ugao nad prečnikom.

Ako oko ΔPQC opišemo kružnicu, kako je $\sphericalangle QCP = 90^\circ$ to je centar opisane kružnice k_1 oko ΔPQR u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i ΔABC.

Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove ΔPNS_1 i ΔPTS.

$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle TSP \cong \sphericalangle NS_1P = \varepsilon$

ΔSPT jkk $\Rightarrow \sphericalangle STP \cong \sphericalangle SPT = \omega$ i $\sphericalangle S_1NP \cong \sphericalangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\sphericalangle SPT = \sphericalangle C_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\sphericalangle SPT$ i $\sphericalangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S,ST)$.